新高考《学科基地密卷》(二)

数　学

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 命题“$\forall x\in\mathbf{N},x^2+1>0$”的否定是 (　　)

A. $\exists x\in\mathbf{N},x^2+1>0$　　B. $\exists x\in\mathbf{N},x^2+1\leqslant 0$

C. $\forall x\in\mathbf{N},x^2+1\leqslant 0$　　D. $\forall x\notin\mathbf{N},x^2+1\leqslant 0$

2. 已知 i 为虚数单位,则复数$\dfrac{\mathrm{i}-3}{2\mathrm{i}+1}$在复平面内对应的点在 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 4 位教师和 2 位学生排成一排,要求两位学生不能相邻,也不能站两端,则不同的排法种数为 (　　)

A. 144　　B. 96　　C. 72　　D. 48

4. 一个容器内装有细沙 10 cm^3,容器倒置后,细沙从容器内缓缓流出,t min 后容器内剩余的细沙量为 $y=10^{1+at}$,其中 a 为常数.经过 4 min 后发现容器内还剩余 5 cm^{3}的沙子,再经过 x min 后,容器中的沙子剩余量为 1.25 cm^3,则 $x=$ (　　)

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

5. 如图 1,第 24 届世界数学家大会会徽图形是我国古代数学家赵爽为证明勾股定理构造的“弦图”,用它作为会徽是国际数学界对我国古代数学伟大成就的肯定.如图 2,四个全等直角三角形的斜边围成正方形 $ABCD$,四个直角顶点构成正方形 $A'B'C'D'$,两个正方形面积之比为 3∶1.设直角三角形 $A'AB$ 中较小锐角$\angle ABA'$为θ,则 $\tan\theta$ 的值为 (　　)

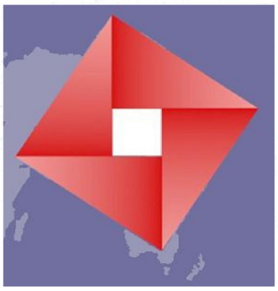


图 1

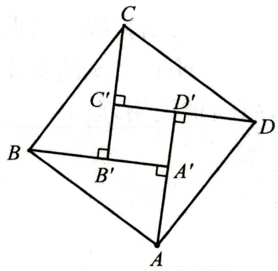


图 2

(第 5 题)

A. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　　B. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$　　C. $3+2\sqrt{2}$　　D. $3-2\sqrt{2}$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中,双曲线 E:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点为 F,过原点的直线 l 交双曲线 E 于 P,Q 两点,且$|PF|=3|FQ|$,$|PQ|=2b$,则双曲线 E 的离心率为 (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

7. “垛积术”是由北宋科学家沈括在《梦溪笔谈》中首创,南宋数学家杨辉、元代数学家朱世杰丰富和发展的一类数列求和方法,有茭草垛、方垛、刍童垛、三角垛等等.某仓库中部分货物堆放成茭草垛:自上而下,第一层 1 件,以后每一层比上一层多 1 件,最后一层是 n 件,已知第一层货物单价为 1 百元,从第二层起,货物的单价是上一层单价的$\dfrac{4}{5}$,若这堆货物总价是 $25-75\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$百元,则 n 的值是 (　　)

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x},x<0,\\x^2+x,x\geqslant 0,\end{cases}$若 $f(x)\geqslant kx$ 恒成立,则实数 k 的取值范围是 (　　)

A. $[-\mathrm{e},1]$　　B. $\left[-\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right]$　　C. $[-\mathrm{e},0]$　　D. $\left[-\dfrac{1}{\mathrm{e}},0\right]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 设 $a>b>0$，则下列不等式中，恒成立的有 ( )

A. $2^{a-b}>1$

B. $\lg(a-b)>0$

C. $\dfrac{a}{a-b}>\dfrac{b}{a}$

D. $a^2+\dfrac{1}{b}>b^2+\dfrac{1}{a}$

10. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 与 $g(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则下列结论正确的是 ( )

A. $g(x)$ 的图象可由 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度得到

B. $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象相邻的两个交点间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$

C. $f(x)+g(x)$ 图象的一条对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{2}$

D. $f(x)\cdot g(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

11. 已知 r 为正数，集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=r^2\}$，$B=\{(x,y)\mid(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$，$A\cap B=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}$，则 ( )

A. $0<a^2+b^2<4r^2$

B. $a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$

C. $b(x_1+x_2)-a(y_1+y_2)=0$

D. $ax_1+by_1<r^2$

12. 根据我省普通高中高考综合改革方案，现将某校高二年级 1 000 名参加生物选择考同学的考试分数转换为等级分，已知等级分 X 的分数转换区间为 $[30,100]$，若使等级分 $X\sim N(80,25)$，则下列说法正确的有 ( )

（参考数据：① $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6827$；② $P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9545$；③ $P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.9973$）

A. 这次考试等级分超过 80 分的约有 450 人

B. 这次考试等级分在 $(65,95]$ 内的人数约为 997

C. 甲、乙、丙 3 人中恰有 2 人的等级分超过 80 分的概率为 $\dfrac{3}{8}$

D. $P(85<X\leqslant90)=0.0428$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，$|\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}|$，则 $\dfrac{|5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}=$__________.

14. 四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面是正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=2AB$，该四棱锥的五个顶点都在同一球面上，E,F 分别是棱 AB,CD 的中点，直线 EF 被球面所截得的线段长为 $\sqrt{6}$，则该球的表面积为________.

15. 若直线 $y=2x+1$ 是曲线 $y=2x+\dfrac{1}{x}-a\ln x$ 的切线，则实数 a 的值是________.

16. 已知椭圆具有如下性质：若椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则椭圆在其上一点 $A(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.设椭圆 E：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左焦点为 F，直线 l 过点 F 交椭圆 E 于点 A,B，分别过点 A,B 作椭圆 E 的两条切线相交于点 P（点 P 不在坐标轴上），O 为坐标原点，则 $\tan\angle OPF$ 的最大值是________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (10 分)若数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}^2-a_n^2=p(n\in\mathbf{N}^*,p$ 为常数),则称数列$\{a_n\}$为等方差数列,p 为公方差.

(1) 已知数列$\{b_n\}$,$\{c_n\}$分别满足 $b_n=\sqrt{2n+1}$,$c_n=n$,请判断它们是否为等方差数列?如果是,请证明;如果不是,请说明理由;

(2) 若数列$\{a_n\}$的各项均为正数,其前 n 项和为 S_n,且 $a_1=1$,数列$\{S_n\}$是公方差为 1 的等方差数列,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

18. (12 分)在① $a=\sqrt{3}$,② $B=\dfrac{\pi}{4}$,③ $c=2b$ 这三个条件中任选两个,补充在下面的问题中,并解决该问题.

在$\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且满足$(a+b)(\sin B-\sin A)=(b-c)\sin C$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 已知________,________,若$\triangle ABC$ 存在,求$\triangle ABC$ 的面积;若$\triangle ABC$ 不存在,说明理由.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答记分.

19. (12 分)随着科技的发展,网络已逐渐融入了人们的生活.网购是非常方便的购物方式,为了了解网购在我市的普及情况,某调查机构进行了有关网购的调查问卷,并从参与调查的市民中随机抽取了男、女各 100 人进行分析,从而得到下表(单位:人):

	经常网购	偶尔或不用网购	总 计
男 性	50		100
女 性	70		100
总 计			

(1) 完成上表,并根据以上数据判断能否在犯错误的概率不超过 0.005 的前提下认为我市市民网购与性别有关;

(2) ① 现从所抽取的女市民中利用分层抽样的方法抽取 10 人,再从这 10 人中随机抽取 3 人赠送优惠券,求抽取的 3 人中至少有 2 人经常网购的概率;

② 将频率视为概率,从我市所有参与调查的市民中随机抽取 10 人赠送礼品,记其中经常网购的人数为 X,求随机变量 X 的数学期望和方差.

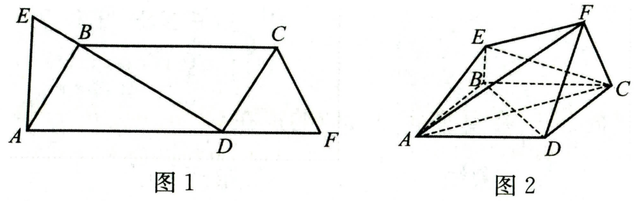
附:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20. (12 分)如图 1,在平行四边形 $ABCD$ 中,$AD=2AB=2\sqrt{3}$,$\angle BAD=60°$,直线 AE 与 AD 垂直,且与 DB 的延长线交于点 E,$\triangle CDF$ 为等边三角形.将$\triangle ABE$ 沿直线 AB 折起,$\triangle CDF$ 沿直线 CD 折起,使 $EB\perp BC$,平面 CDF // 平面 BAE(如图 2).

(1) 求证:$BD\perp$ 平面 CDF;

(2) 求二面角 $E\text{-}AC\text{-}F$ 的余弦值.



(第 20 题)

21. (12 分)在直角坐标系 xOy 中,动圆 P 与圆 Q:$(x-2)^2+y^2=1$ 外切,且圆 P 与直线 $x=-1$ 相切,记动圆圆心 P 的轨迹为曲线 C.

(1) 求曲线 C 的轨迹方程;

(2) 设过定点 $S(-2,0)$的动直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点,试问:在曲线 C 上是否存在点 M(与 A,B 两点相异),当直线 MA,MB 的斜率存在时,直线 MA,MB 的斜率之和为定值?若存在,求出点 M 的坐标;若不存在,请说明理由.

22. (12 分)函数 $f(x)=(x-m\ln x-2)\ln x$,$m\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $m=1$ 时,求函数 $f(x)$在区间$(1,+\infty)$上的最小值;

(2) 讨论函数 $g(x)=f(x)+x-1$ 在区间$(1,+\infty)$上的零点的个数.