



数列知识主线

数列二级知识线索

三级知识线索

● 一级知识点
○ 二级知识点
● 三级知识点

等差数列知识主线

等差数列二级知识线索

数列 1

数列

等差数列

定义

递推公式

通项公式

数列的分类

按项的变化趋势分类

按项数分类

有穷数列

无穷数列

数列与函数的关系

数列是一类特殊的函数，其自变量为正整数。

 S_n 与 a_n 的关系

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2). \end{cases}$$

求通项公式 a_n

数学归纳法

根据数列前几项的特点猜出通项公式，再用数学归纳法加以证明。

已知 S_n 求通项公式

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2). \end{cases}$$

求数列的最大(小)项

解不等式组

$$\begin{cases} a_n \geq a_{n-1}, & \begin{cases} a_n \leq a_{n-1}, \\ a_n \geq a_{n+1}, \end{cases} \\ a_n \geq a_{n+1}, & \begin{cases} a_n \leq a_{n-1}, \\ a_n \leq a_{n+1} \end{cases} \end{cases} \quad n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*, \text{即可求解.}$$

已知递推公式求通项公式

- ①累加法;
- ②累乘法;
- ③待定系数法;
- ④定义法(已知数列类型);
- ⑤作商法;
- ⑥两边取倒数法;
- ⑦两边同除法;
- ⑧两边取对数法;
- ⑨因式分解法.

转化为函数最值问题求解.

前 n 项和公式法: 前 n 项和满足 $S_n = An^2 + Bn$ (A, B 为常数, $n \in \mathbf{N}^*$).

定义

通项公式

$$a_n - a_{n-1} = d \quad (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*),$$

其中 d 为常数.

等差中项

若 a, A, b 三个数成等差数列, 那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项, 且 $2A = a + b$.

前 n 项和公式

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

性质

$d > 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 是递增数列;
 $d = 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 是常数列;
 $d < 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 是递减数列.

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 每隔 k ($k \in \mathbf{N}^*$) 项取出一项, 按照原来的顺序排列, 所得数列仍是等差数列.

若数列 $\{b_n\}$ 也是等差数列, 则数列 $\{ka_n \pm mb_n\}$ (k, m 为常数) 也是等差数列.

若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都为等差数列, S_n, T_n 分别为它们的前 n 项和, 则 $\frac{a_m}{b_m} = \frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{推广形式: } a_n = a_m + (n-m)d \quad (m, n \in \mathbf{N}^*).$$

若 $m+n=p+q$ ($m, n, p, q \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$.

数列 $\{\lambda a_n + b\}$ (λ, b 是常数) 是公差为 λd 的等差数列.

$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也成等差数列, 其首项等于 a_1 , 公差是 $\frac{d}{2}$.

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}, \dots$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 构成公差为 $k^2 d$ 的等差数列.

基本运算

等差数列的证明与判定

可用来作为证明的直接依据

证明依据

定义法: 证明 $a_{n+1} - a_n = d$ (d 为常数, $n \in \mathbf{N}^*$).

等差中项法: 证明 $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

可在选择、填空题中直接使用

判定依据

通项法: 通项满足 $a_n = pn + q$ (p, q 为常数, $n \in \mathbf{N}^*$).

对于等差数列问题, 如果给出两个条件, 就可以通过列方程(组)求出 a_1, d , 如果再给出第三个条件, 就可以完成 a_1, d, n, a_n, S_n 的“知三求二”问题.

求等差数列前 n 项和的最值问题

二次函数法

将 S_n 看作关于 n 的二次函数, 运用配方法, 借助函数的单调性及数形结合求解, 特别注意 n 是正整数.

通项公式法

$$\text{求使得 } \begin{cases} a_n \geq 0, \\ a_{n+1} \leq 0 \end{cases} \quad (a_1 > 0, d < 0) \text{ 或 } \begin{cases} a_n \leq 0, \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases} \quad (a_1 < 0, d > 0)$$

成立的 n 值即可得 S_n 的最大值或最小值.

前 n 项和法

若 $\begin{cases} S_n \geq S_{n-1}, \\ S_n \geq S_{n+1} \end{cases} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, 则前 n 项和 S_n 最大; 若 $\begin{cases} S_n \leq S_{n-1}, \\ S_n \leq S_{n+1} \end{cases} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, 则前 n 项和 S_n 最小.