

基于阶段性发展的数学建模教学设计探究

王礼勇¹, 李 芳², 王聪聪¹, 黄忠裕³

(1. 浙江省温州中学; 2. 浙江省温州外国语学校; 3. 温州大学)

摘 要: 基于学生的知识、水平和能力等因素, 数学建模教学设计必须充分考虑从简单到复杂、从低级到高级的阶段性发展, 数学建模教学设计应该遵循简单建模、典型建模和综合建模三个阶段.

关键词: 数学建模; 简单建模; 典型建模; 综合建模; 教学设计

数学建模是运用数学思想、方法和知识解决实际问题的过程, 它搭建了数学与外部世界联系的桥梁, 是数学应用的重要形式, 也是数学核心素养的重要组成部分. 《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称《标准》)中指出, 数学建模是对现实问题进行数学抽象, 用数学语言表达问题、用数学知识与方法构建模型解决问题的过程, 主要包括在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题, 分析问题、构建模型, 求解结论, 验证结果并改进模型, 最终解决实际问题.

在数学中, 有些现实问题比较简单, 可以直接抽象出数学模型; 有些现实问题比较复杂, 需要预设一些条件, 而且需要考虑的因素也比较多. 因此, 基于学生的数学知识、数学认知水平、解题策略和方法、问题分析能力和应用意识, 根据《标准》对数学建模素养的三个层次要求, 数学建模的教学设计必须充分考虑从简单到复杂、从低级到高级的阶段性发展. 数学建模教学设计应该遵循简单建模、典型建模和综合建模三个阶段.

一、基于简单建模阶段的教学设计

简单建模阶段的应用问题比较简单, 往往可以直

接套用基本数学模型. 教学重点是熟悉基本的数学模型, 会直接套用基本的数学模型解决简单的实际问题; 能够借助或引用已有数学建模的结果说明问题.

简单建模阶段的具体要求如下: 在简单的情形下, 使学生初步学会分辨哪类问题应该选用哪种数学模型; 使学生初步学会将日常生活中的语言翻译成数学语言; 对于学过的数学模型, 能够举例说明数学建模的意义, 体会其中蕴涵的数学思想.

这一阶段的要求, 相当于《标准》中的数学建模水平一, 水平一是高中毕业应当达到的要求, 也是高中毕业的数学学业水平考试的命题依据.

在这一阶段, 教师要引导学生对一些简单的数学模型进行归纳. 例如, 增长率、繁殖率、利率等问题可以考虑幂函数、指数函数、对数函数和数列模型; 最值问题可以考虑函数、不等式和三角模型; 行程、工程、浓度等问题可以考虑方程(组)、不等式(组)模型; 拱门(桥)、炮弹发射、卫星轨迹等与轨迹有关的问题可以考虑二次曲线模型.

在“任意角的三角函数”的第一课时, 引入摩天轮问题就是很好的体现.

案例1: 摩天轮问题(节选).

环节1: 情境创设.

今天, 我们的数学之旅就从摩天轮开始. 随着摩

收稿日期: 2020-03-25

作者简介: 王礼勇(1987—), 男, 中学一级教师, 主要从事数学教育与数学解题研究.

天轮的转动,乘坐摩天轮的人离地面的高度在变化,如图1所示.



图1

环节2: 问题提出.

如图2, 假设摩天轮的中心离地面的高度为 h_0 , 它的直径为 $2r$, 逆时针方向匀速转动, 转动一周需要360秒, 那么转动一秒转了多少度? 若现在你坐在摩天轮的座舱中, 从初始位置点 P 出发. 过了30秒后, 你离地面的高度为多少? 过了45秒呢? 过了 t 秒呢? 过了150秒呢? $t = 210$ 秒, $t = 330$ 秒, $t = 390$ 秒呢?

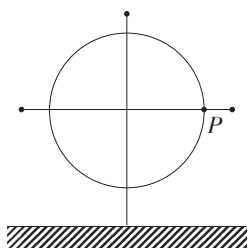


图2

环节3: 模型建立.

当时间为 t 秒时, 人距离地面的高度用模型 $h = h_0 + r \sin \frac{t}{180} \pi$ 来表示.

如图3, 设 $\angle M_1OP_1 = \angle M_2OP_2 = \angle M_3OP_3 = \angle M_4OP_4 = \frac{\pi}{6}$, 则在区域一, 有 $h = h_0 + r \sin \frac{\pi}{6} = h_0 + r \cdot \frac{M_1P_1}{OP_1} = h_0 + \frac{1}{2}r$; 在区域二, 有 $h = h_0 + r \sin \frac{5\pi}{6} = h_0 + r \cdot \frac{M_2P_2}{OP_2} = h_0 + \frac{1}{2}r$; 在区域三, 有 $h = h_0 + r \sin \frac{7\pi}{6} = h_0 - r \cdot \frac{M_3P_3}{OP_3} = h_0 - \frac{1}{2}r$; 在区域四, 有 $h = h_0 + r \sin \frac{11\pi}{6} = h_0 - r \cdot \frac{M_4P_4}{OP_4} = h_0 - \frac{1}{2}r$.

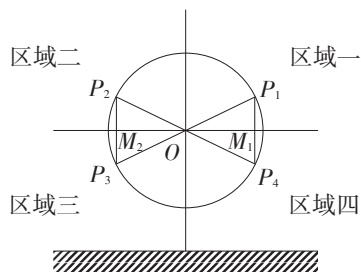


图3

若摩天轮再次转到区域一, 则它的高度又可以如何定义呢? 区域二呢? 区域三、区域四呢?

环节4: 实际应用.

自然界或者由自然规律决定的周期现象, 如天体

运动、潮汐问题、日出日落、音乐中的周期、毛发的生长周期等.

二、基于典型建模阶段的教学设计

随着对数学基本模型的逐渐熟知, 学生对于问题的解决不再局限于对问题结果的直接寻求, 更要对问题的引入、预计的解决方式、连续引发的新问题等方面进行探索. 此阶段的教学重点是帮助学生建立起对数学建模基本方法的理解, 学会分析实际问题的对象与关系结构, 确定主要因素和变量, 继而感受数学模型的建立, 体会数学在社会生产与日常生活中的巨大作用.

典型建模阶段的具体要求如下: 能够在熟悉的情境中, 发现问题并将其转化为数学问题; 能够选择合适的数学模型表达所要解决的数学问题, 学会寻找问题中诸因素间的数量关系; 在交流的过程中, 能够用模型的思想说明问题.

这一阶段的要求, 相当于《标准》中的数学建模水平二, 水平二是高考的要求, 也是高考数学的命题依据.

在这一阶段, 教师要引导学生对一些典型的数学模型进行经验积累, 除了利用必修课进行拓展, 还可以利用选修课进行拓展. 在温州中学的“数学体验中心”设置了较多的展板, 而每一块展板上的内容都是“活”的, 都是选修的题材. 例如, 有一个展板是关于摆线的内容, 涉及物理中流行的“最速降线”问题. 下面的案例是以摆线为主题开设的一节课.

案例2: 摆线(节选).

环节1: 引入情境, 观察生活.

在骑自行车的时候, 车轮上的某一处有一个点 P , 那么在直线骑行的过程中, 点 P 的运动轨迹是什么?

环节2: 联系实际, 分析问题.

运用几何画板软件模拟点 P 的运动轨迹, 发现轨迹形状就是摆线(如图4), 建立平面直角坐标系, 如图5所示.

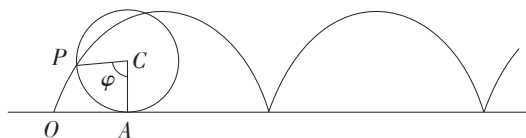


图4

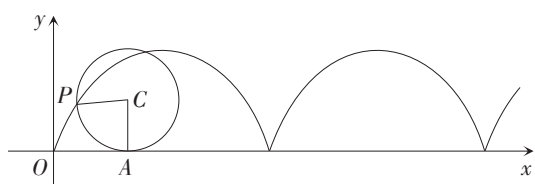


图5

环节3: 合作探究, 构建模型.

利用参数方程, 可以求出摆线的方程, 师生共同总结摆线的定义.

点 P 的横纵坐标随着 φ 如何变化? 该曲线的参数方程是
$$\begin{cases} x = r(\varphi - \sin \varphi), \\ y = r(1 - \cos \varphi) \end{cases} (\varphi \in \mathbf{R}).$$

摆线定义: 在平面上, 一个动圆沿着一条定直线作无滑动的滚动时, 动圆圆周上的定点的运动轨迹叫做摆线.

下面, 继续来探索两个问题, 学生可以任意选择一个来完成.

探究1: 一个半径是 r 的轮子沿着直线轨道无滑动滚动, 在轮辐上有一点 M , 与轮子中心的距离是 b ($b < r$), 求点 M 的轨迹方程.

所求点 M 的轨迹的参数方程是
$$\begin{cases} x = r\varphi - b \sin \varphi, \\ y = r - b \cos \varphi \end{cases} (\varphi \in \mathbf{R}).$$

探究2: 如图6, 一个半径是 $4r$ 的定圆 O 和一个半径是 r 的动圆 C 内切. 当圆 C 沿圆 O 无滑动地滚动时, 探求圆 C 上的定点 P (开始时在点 K) 的轨迹的参数方程.

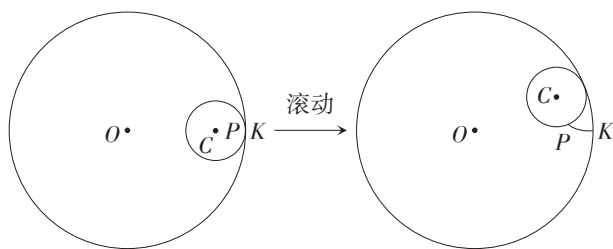


图6

所求的点 P 的轨迹的参数方程是
$$\begin{cases} x = 4r \cos^3 \varphi, \\ y = 4r \sin^3 \varphi \end{cases} (\varphi \in \mathbf{R}).$$

运用几何画板软件演示, 在外摆线多样的情况下, 进一步摆动圆的半径, 与圆的参照物的半径是有比例的, 按照这样的方式, 学生可以用原有的知识进行拓展.

环节4: 回归生活, 解决实际.

在数学史上, 在发现圆锥曲线后, 摆线受到科学家较多的关注, 那么摆线在实际生产生活中有哪些应用呢?

“公交车的折叠式车门”就是模仿“内摆线中的星形线”设计的, 如图7所示; 我国古代的许多房子的“大屋顶”是摆线的拱形弧的形状, 这涉及1696年伯努利提出的最速降线问题, 如图8所示.

公交车
折叠式车门



图7



内摆线
星形线

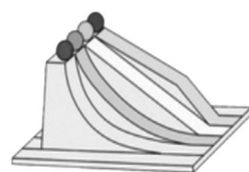


图8

三、基于综合建模阶段的教学设计

综合建模阶段的数学建模问题一般只是给出问题情境及基本要求, 学生要根据这些情境及基本要求收集信息, 提出多种解决方案, 进而优选方案, 并对问题进行进一步拓展.

该阶段的教学重点是: 实际问题的解决常常需要把模糊的问题提炼成比较明确的数学问题, 要自己选择研究策略, 并针对结果进一步修改问题的求解模型和算法, 最终成功经历数学建模的整个过程.

综合建模阶段的具体要求如下: 能够在综合情境中, 运用数学思维进行分析, 发现情境中的数学关系, 提出数学问题; 能够运用数学建模的一般方法和相关知识, 创造性地建立数学模型, 解决问题; 在交流的过程中, 能够通过数学建模的结论和思想阐释科学规律和社会现象.

这一阶段的要求, 相当于《标准》中的数学建模水平三, 水平三是基于必修、选择性必修和选修课程的某些内容对数学学科核心素养的达成提出的要求, 可以作为大学自主招生的参考.

在这一阶段, 教师应该引导学生从日常生活中发现并提出问题; 对原始的实际问题进行必要的、合理的简化, 用准确的语言做出假设; 根据不同的假设,

选择相应的数学模型;根据数学模型求解后的情况,对所建立的数学模型进行评价.

此外,在综合建模阶段,教师要注意引导学生加强数学建模与其他学科的整合与渗透.生活中的问题并非只涉及数学,因此各学科的综合是必然的趋势,如何在专业知识的基础上,渗透其他学科知识,并在解决问题时,深入问题的本质抓住关键,亦是综合建模阶段的一大努力方向.

案例3: 包装彩绳——空间折线长度问题(节选).

环节1: 引入情境, 观察生活.

问题1: 售货员对礼盒做了五个捆扎,如图9所示,大家会选择哪个做包装?



图9

环节2: 分析问题, 提出问题.

问题2: 商品的包装不仅要考虑牢固美观,还要考虑经济节俭.对于十字包扎和斜包扎,在盒子和彩绳材料确定且忽略花结用绳长度的情况下,如何体现经济节俭呢?

课堂任务: 动手包一包、比一比,哪种包扎方式用绳更短?

环节3: 合作探究, 数学建模.

课堂任务: 动手画一画十字包扎和斜包扎的直观图.

问题3: 能否将实际问题抽象为数学问题,并用数学语言表达?

不妨假设长方体的长、宽、高分别为 x, y, z , 如图10所示, 则 $L_1 = 2x + 2y + 4z$, $L_2 = |AB| + |BC| + \dots + |HA|$, 比较 L_1 和 L_2 的大小.

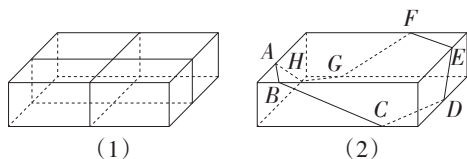


图10

问题4: 能用数学语言表达刚才的分析过程吗?

将花样捆扎的长方体展开在一个平面上, 则彩绳的

平面展开图是一条折线, 该折线的长度即为 L_2 , $L_2 < |AP| + |A'P| = L_1$, 如图11所示.

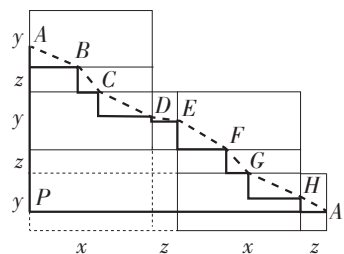


图11

课堂发现: 对于任意的长方体盒子, 斜包扎比十字包扎用绳更短.

环节4: 问题拓展, 数学验证.

问题5: 在该模型中, 斜包扎用绳的长度是否有最小值? 彩绳沿着怎样的路径包扎可以取到最小值?

经过探究, 得 $(L_2)_{\min} = |AA'| = \sqrt{(2x + 2z)^2 + (2y + 2z)^2}$.

问题6: 上述模型一定合理吗? 结论一定成立吗? 捆扎点的具体位置对结论有没有影响? 若高改变了, 结论又会如何?

问题拓展: 为了对某长方体盒子进行防雨防潮处理, 现用一种能防雨防潮的矩形薄膜对其进行包装, 要求做到盒子表面全覆盖, 问怎样包装能使所用的矩形薄膜面积最小(重叠或浪费的也计入)?

著名数学教育家弗赖登塔尔在谈到数学应用时, 曾指出应从两个方面来理解数学应用: 既要重视从实际问题中提取数学概念和原理, 又要重视用数学概念和原理反过来处理实际问题. 而要将学校数学更为广泛地应用到不同的脉络背景, 数学化应该是数学教学的主要方式.

基于阶段性发展的数学建模教学设计, 用数学建模思想统领, 以期学生能用数学的眼光观察实际情境, 并提出问题. 进一步用数学思维思考建立模型, 用数学语言表达求解模型, 用批判精神反思检验结果.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [2] 徐宏贤, 尹学明. 包装彩绳——空间折线长度问题[R]. 杭州: 浙江省教育厅教研室, 2019.