第6课时　空间向量的坐标表示(2)



知识技能

1. 掌握空间向量数量积的坐标形式.

2. 掌握空间向量的模长公式、夹角公式、两点间的距离公式及其运用．

思想方法

运用类比的思想方法，将平面向量的数量积的坐标形式推广到空间向量数量积的坐标形式．

核心素养

1. 将平面向量数量积的坐标形式推广到空间向量数量积的坐标形式，发展了数学逻辑推理素养．

2. 运用公式求解，提升了数学运算素养．



教学重点：空间向量数量积的坐标形式，空间向量的模长公式、夹角公式、两点间的距离公式．

教学难点：能够用向量的方法解决有关垂直、夹角和距离的简单问题；会根据向量的坐标判断两个向量共线或垂直．



问题导引

预习教材P22～24，思考下面的问题：

1. 如何将平面向量数量积的坐标运算公式推广到空间向量呢？

2. 空间向量的模长公式、夹角公式、两点间的距离公式是怎样的？

即时体验[1]

1. 已知向量***a***＝(0, －1, 1), ***b***＝(4, 1, 0)，则***a***·***b***＝\_\_\_－1\_\_,\_|***a***＋***b***|＝ 　.

2. 向量***a***＝(2, －3, 1)与***b***＝(1, 0, 0)的夹角的余弦值是 　.

3. 已知向量***a***＝(1, 1, *x*), ***b***＝(1, 2, 1), ***c***＝(1, 1, 1)，且满足条件(***c***－***a***)·(2***b***)＝－2，则*x*＝\_2\_\_.



一、 问题情境

1. 平面向量数量积的坐标表示及一些应用[2]

(1) 对于平面内两个非零向量***a***＝(*x*1, *y*1)，***b***＝(*x*2, *y*2)，则 ***a***·***b***＝*x*1*x*2＋*y*1*y*2.

(2) 长度、夹角、垂直的坐标表示

① 长度：***a***＝(*x, y*)⇒|***a***|2＝*x*2＋*y*2⇒|***a***|＝；

② 两点间的距离公式：若*A*(*x*1, *y*1), *B*(*x*2, *y*2)，则||＝；

③ 夹角：cos*θ*＝＝；

④ 垂直的充要条件：***a***⊥***b***⇔***a***·***b***＝0，即*x*1*x*2＋*y*1*y*2＝0.(注意与向量共线的坐标表示的区别)

2. 类比平面向量数量积的坐标表示，思考对于空间两个非零向量，它们的数量积的坐标表示又是怎样的呢？

二、 数学建构

问题1对于单位正交基底{***i, j, k***}，有***i***·***i***＝***j***·***j***＝***k***·***k***＝1, ***i***·***j***＝***i***·***k***＝***j***·***k***＝0.设空间两个非零向量***a***＝(*x*1, *y*1, *z*1), ***b***＝(*x*2, *y*2, *z*2)，请同学们根据向量数量积的运算律推导***a***·***b***的坐标表示．

解　若{***i, j, k***}是空间的一个单位正交基底，则

***a***＝(*x*1, *y*1, *z*1)＝*x*1***i***＋*y*1***j***＋*z*1***k***，

***b***＝(*x*2, *y*2, *z*2)＝*x*2***i***＋*y*2***j***＋*z*2***k***，

所以***a***·***b***＝(*x*1***i***＋*y*1***j***＋*z*1***k***)·(*x*2***i***＋*y*2***j***＋*z*2***k***)＝*x*1*x*2***i***2＋*y*1*y*2***j***2＋*z*1*z*2***k***2＋*x*1*y*2***i***·***j***＋*x*1*z*2***i***·***k***＋*y*1*x*2***j***·***i***＋*y*1*z*2***j***·***k***＋*z*1*x*2***k***·***i***＋*z*1*y*2***k***·***j***＝*x*1*x*2＋*y*1*y*2＋*z*1*z*2.

从而得两个空间向量数量积的坐标表示公式：***a***·***b***＝*x*1*x*2＋*y*1*y*2＋*z*1*z*2.

即两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和．

问题2我们知道|***a***|2＝***a***·***a***，即|***a***|＝.如果***a***＝(*x*1, *y*1, *z*1)，那么|***a***|的值为多少？

解　模长公式：若***a***＝(*x*1, *y*1, *z*1)，则|***a***|＝＝.

问题3请同学们使用向量方法推导*A*(*x*1, *y*1, *z*1), *B*(*x*2, *y*2, *z*2)间的距离公式．

解　由＝(*x*2－*x*1, *y*2－*y*1, *z*2－*z*1)及模长公式得||＝.

两点间的距离公式：若*A*(*x*1, *y*1, *z*1), *B*(*x*2, *y*2, *z*2)，则*AB*＝.

问题4设空间两个非零向量***a***＝(*x*1, *y*1, *z*1), ***b***＝(*x*2, *y*2, *z*2)，它们的夹角为〈***a, b***〉，你能用坐标表示cos〈***a, b***〉吗？

解　由向量数量积的定义，可得

cos〈***a***·***b***〉＝＝.

特别地，***a***⊥***b***⇔***a***·***b***＝0⇔*x*1*x*2＋*y*1*y*2＋*z*1*z*2＝0.

三、 数学运用

例1　已知向量***a***＝(3, 5, －4), ***b***＝(2, 1, 8)．

(1) 求***a***·***b***；

(2) 若*λ*1***a***＋*λ*2***b***与*z*轴垂直，求*λ*1, *λ*2满足的关系式．[3]

(见学生用书课堂本P11)

[处理建议]　问题(1)，引导学生根据向量数量积的坐标表示求解；问题(2)，引导学生用坐标表示*z*轴(不唯一)，再根据题设条件解题．

[规范板书]　解　(1) ***a***·***b***＝(3, 5, －4)·(2, 1, 8)＝3×2＋5×1＋(－4)×8＝6＋5－32＝－21.

(2) 因为(*λ*1***a***＋*λ*2***b***)·(0, 0, 1)＝(3*λ*1＋2*λ*2, 5*λ*1＋*λ*2, －4*λ*1＋8*λ*2)·(0, 0, 1)＝－4*λ*1＋8*λ*2＝0，

所以*λ*1－2*λ*2＝0.

[题后反思]　*z*轴可以用(0, 0, 1)表示，也可以用(0, 0, 2)等表示，这是无关紧要的，因为垂直只体现方向性，与长度无关．问题(2)为例2的理解作铺垫．

　已知***a***＝(*λ*＋1, 1, 2*λ*)，若|***a***|＝，且***a***与***c***＝(2, －2*λ*， －*λ*)垂直，求***a***.

[规范板书]　解　因为|***a***|＝，且***a***⊥***c,***

所以化简得解得*λ*＝－1.因此，***a***＝(0, 1, －2)．

[题后反思]　利用向量平行与垂直条件来确定向量坐标也是向量平行与垂直题目中重要的一部分，用定义列式后，通过解方程(组)，求出其坐标.

例2 (教材P23例4)已知点*A*(3, 1, 3), *B*(1, 5, 0)．

(1) 求线段*AB*的中点坐标和长度；

(2) 求到*A, B*两点距离相等的点*P*(*x, y, z*)的坐标*x, y, z*满足的条件．[4]

(见学生用书课堂本P11)

[处理建议]　问题(2)，引导学生根据两点间的距离公式列出等量关系式后，教师可进一步引导学生探究空间轨迹问题．

[规范板书]　解　(1) 设*M*是*AB*的中点，*O*是坐标原点，则

＝(＋)＝[(3, 1, 3)＋(1, 5, 0)]＝，

所以线段*AB*的中点坐标是.

因为＝(－2, 4, －3)，所以线段*AB*的长度为||＝＝.

(2) 因为*P*(*x, y, z*)到*A, B*两点距离相等，则

＝

，

化简得4*x*－8*y*＋6*z*＋7＝0.

所以到*A, B*两点距离相等的点*P*的坐标*x, y, z*满足的条件是4*x*－8*y*＋6*z*＋7＝0.

[题后反思]　平面内到*A, B*两点距离相等的点的轨迹是线段*AB*的垂直平分线，空间内到*A, B*两点的距离相等的点*P*(*x, y, z*)构成的集合就是线段*AB*的中垂面．若将点*P*的坐标满足的条件4*x*－8*y*＋6*z*＋7＝0的系数构成一个向量***a***＝(4, －8, 6)，与＝(－2, 4, －3)共线．

　写出到点*C*(1, －2, 3)的距离等于4的点*M*(*x, y, z*)的坐标*x, y, z*满足的关系式，并说出点*M*的轨迹图形．

[处理建议]　引导学生写出*x, y, z*满足的关系式，然后启发学生类比例2及平面中的相关知识，共同探讨轨迹图形．

[规范板书]　解　(*x*－1)2＋(*y*＋2)2＋(*z*－3)2＝16，点*M*的轨迹是以点*C*为球心、4为半径的球面．

例3如图，在直三棱柱*ABC*­*A*1*B*1*C*1中，*CA*＝*CB*＝1, ∠*BCA*＝90°， *AA*1＝2, *N*为*A*1*A*的中点．



(例3)

(1) 求*BN*的长；

(2) 求*A*1*B*与*B*1*C*所成角的余弦值．[5]

(见学生用书课堂本P12)

[处理建议]　建立合适的空间直角坐标系，利用空间向量的坐标运算求出结果.

[规范板书]　解　如图，以*C*为坐标原点，*CA, CB, CC*1所在直线分别为*x*轴、*y*轴、*z*轴建立空间直角坐标系*C*­*xyz*.



(例3答图)

(1) 依题意得点*B*(0, 1, 0), *N*(1, 0, 1), 所以||＝＝， 所以*BN*＝.

(2) 依题意得点*A*1(1, 0, 2), *C*(0, 0, 0), *B*1(0, 1, 2), 所以＝(－1, 1, －2), ＝(0, －1, －2), 所以·＝(－1)×0＋1×(－1)＋(－2)×(－2)＝3.又因为||＝， ||＝， 所以cos〈， 〉＝＝.而异面直线所成角为锐角或直角，故*A*1*B*与*B*1*C*所成角的余弦值为.

[题后反思]　利用空间向量的坐标运算的一般步骤：(1) 建系：根据几何图形建立恰当的空间直角坐标系．(2) 求坐标：① 求出点的坐标；②写出向量的坐标．(3) 论证、计算：结合公式进行论证、计算．(4) 转化：转化为平行与垂直、夹角与距离等问题．

　如图，在棱长为1的正方体*ABCD*­*A*1*B*1*C*1*D*1中，*E, F*分别为*D*1*D, BD*的中点，点*G*在棱*CD*上，且*CG*＝*CD, H*为*C*1*G*的中点．



(变式)

(1) 求证：*EF*⊥*B*1*C*；

(2) 求*FH*的长；

(3) 求*EF*与*C*1*G*所成角的余弦值．

 [规范板书]　(1) 证明　如图，建立空间直角坐标系*D*­*xyz, D*为坐标原点，则知点*E*， *F*， *C*(0, 1, 0), *C*1(0, 1, 1), *B*1(1, 1, 1), *G*， *H*.



(变式答图)

因为＝－＝， ＝(0, 1, 0)－(1, 1, 1)＝(－1, 0, －1)，

所以·＝×(－1)＋×0＋×(－1)＝0, 所以⊥，即*EF*⊥*B*1*C*.

(2) 解　由(1)可得＝， 所以||＝＝. 所以*FH*＝.

(3) 解　因为＝－(0, 1, 1)＝， 所以||＝.因为·＝×0＋×＋×(－1)＝， ||＝， 所以cos〈， 〉＝＝.故异面直线*EF*与*C*1*G*所成角的余弦值为.

例4 已知点*A*(1, 2, 3), *B*(2, 1, 2), *P*(1, 1, 2)，点*Q*在*OP*(*O*为坐标原点)上运动，当·取得最小值时，求点*Q*的坐标．[6]

[处理建议]　根据题意设出点*Q*的坐标，再由数量积的意义将·转化为函数问题，最后利用函数知识求解．

[规范板书]　解　设＝*λ*＝(*λ*， *λ*， 2*λ*)，则＝(1－*λ*， 2－*λ*， 3－2*λ*), ＝(2－*λ*， 1－*λ*， 2－2*λ*), 所以·＝(1－*λ*)(2－*λ*)＋(2－*λ*)(1－*λ*)＋(3－2*λ*)(2－2*λ*)＝6*λ*2－16*λ*＋10＝62－， 所以当*λ*＝时，·取得最小值－，此时*Q*.

[题后反思]　利用空间向量数量积的坐标表示，常可将一些综合性问题化归为函数或方程问题，从而用函数或方程知识来研究、解决问题．

　已知***a***＝(cos*α*， sin*α*， 1), ***b***＝(sin*β*， －cos*β*， －1)，求|***b***＋***a***|的最大值．

[规范板书]　解法一　由于***b***＋***a***＝(cos*α*＋sin*β*， sin*α*－cos*β*， 0)，

则|***b***＋***a***|2＝(cos*α*＋sin*β*)2＋(sin*α*－cos*β*)2＝2＋2sin(*β*－*α*)，

所以当*β*－*α*＝＋2*k*π(*k*∈**Z**)时，|***b***＋***a***|max＝2.

解法二　|***a***|＝＝， |***b***|＝， ***a***·***b***＝cos*α*sin*β*－sin*α*cos*β*－1＝sin(*β*－*α*)－1, 所以|***b***＋***a***|2＝|***a***|2＋2***a***·***b***＋|***b***|2＝2＋2sin(*β*－*α*), 所以当*β*－*α*＝＋2*k*π(*k*∈**Z**)时，|***b***＋***a***|max＝2.

四、 课堂练习

1. 已知向量***a***＝(－3, 2, 5), ***b***＝(1, *m,* 3)，若***a***⊥***b***，则常数*m*的值为(A)

A. －6 B. 6

C. －9 D. 9

2. 已知向量***a***＝(0, －1, 1), ***b***＝(4, 1, 0), |*λ****a***＋***b***|＝，且*λ*>0，则*λ*的值等于(C)

A. 5 B. 4

C. 3 D. 2

3. 若向量***a***＝(1, *λ*， 2), ***b***＝(2, －1, 2)，且***a***与***b***的夹角的余弦值为，则*λ*＝－2或.

4. 若点*P*(*x, y, z*)到*A*(1, 0, 1), *B*(2, 1, 0)两点的距离相等，则*x, y, z*满足的关系式是2*x*＋2*y*－2*z*－3＝0.

五、 课堂小结

1. 在计算和证明立体几何问题时，如果能够在原图中建立适当的空间直角坐标系，将图形中有关量用坐标来表示，利用空间向量的坐标运算来处理，那么往往可以在很大程度上降低对空间想象的要求．

2. 求向量坐标的常用方法：先设出向量坐标，再求待定系数.



[1] 为本节课所讲内容作铺垫，揭示本节课要研究的内容，引导学生进行课前预习．

[2] 回顾平面向量数量积的坐标表示及相关知识，为引导学生类比获得空间向量数量积的坐标表示作铺垫．

[3] 巩固理解空间向量数量积、夹角、模长的坐标形式，灵活应用所学知识解决问题，强化运算．

[4] 一方面巩固空间内两点间的距离公式；另一方面通过此题让学生类比猜想：在二维平面内到两定点的距离相等的点的集合是线段的垂直平分线，那么推广到三维空间中，到两个定点的距离相等的点的集合构成什么图形？为后续学习作准备.

[5] 通过本例，让学生能够利用空间两点之间的距离公式和空间向量的夹角公式解决综合性问题．

[6] 通过本例，将空间向量中的数量积问题转化为函数、方程问题，进而求解．