第5课时　离散型随机变量的均值



知识技能

1．通过实例，理解取有限值的离散型随机变量的均值(数学期望)的概念和意义．

2．能计算简单离散型随机变量的均值(数学期望)，并能解决一些实际问题．

思想方法

从样本平均数到离散型随机变量的均值，感受类比思想；通过均值的实际应用，培养学生的数学应用意识．

核心素养

1．在对离散型随机变量的均值意义理解的过程中，发展数学抽象素养．

2．通过对离散型随机变量的均值的计算及在决策中的应用，发展数学运算及数据分析素养．



重点：离散型随机变量的均值的理解及应用．

难点：离散型随机变量的均值在实际问题中的应用．



问题导引

预习教材P107～110，思考下面的问题：

1．在必修第二册“统计”一章中，已知取值为*x*1,*x*2,…，*xn*的频率分别为*p*1,*p*2,…，*pn*，如何计算样本的平均数？

解　*x*1*p*1＋*x*2*p*2＋ … ＋*xnpn*，其中*pi*的值为*xi*的频率值．

2．如何计算离散型随机变量的均值(数学期望)?

解　*E*(*X*)＝*x*1*p*1＋*x*2*p*2＋ … ＋*xnpn*，其中，*pi*≥0，*i*＝1,2,…，*n,p*1＋*p*2＋…＋*pn*＝1.

3．随机变量的均值与样本平均数有什么区别？

解　对于确定的随机现象，均值(数学期望)都是确定的实数，它们没有随机性；而对于不同的样本，其平均数不一定相同．

即时体验

1．判断(正确的打“√”，错误的打“×”)：

(1) 随机变量的数学期望是一个确定的数；(√)

(2) 随机变量的数学期望反映了随机变量取值的波动情况；(×)

(3) 随机变量的均值反映了样本的平均水平；(×)

(4) 若随机变量*X*服从两点分布，则*E*(*X*)＝*P*(*X*＝1)．(√)

2．已知*X*的分布列如下表所示，那么*E*(*X*)＝\_\_－0.3\_\_.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | －1 | 0 | 1 |
| *P* | 0.5 | 0.3 | 0.2 |

提示　*E*(*X*)＝(－1)×0.5＋0×0.3＋1×0.2＝－0.3.



一、 问题情境

某种福利彩票每张面值2元，购买者可从0,1,2, …， 9这十个数字中选择3个数字(可以重复)．当所选3个数字与随机摇出的开奖号码数字及顺序均相同时，可以获得500元奖金．如果你长期购买这种彩票，那么你的收益状况如何？[1]

分析：要了解长期收益情况，也就是要确定在购买很多次这种彩票的前提下，平均每张彩票的收益金额．因为从0,1,2, …，9这十个数字中选择3个数字(可以重复)，共有1000种抽法，所以购买一张彩票的获奖概率为.

根据条件可知，若设随机变量*X*为购买一张彩票时的中奖金额，则其概率分布如下表所示：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 500 |
| *P* | 0.999 | 0.001 |

也就是说，在购买很多张彩票的前提下，平均来说，每1000张彩票中有且只有1张中奖，即中奖总金额为500元．因此，平均每张彩票的中奖金额为＝0.5元，即购买一张彩票的平均收益为0.5元．

二、 数学建构

**1**．离散型随机变量的均值或数学期望

“问题情境”中的0.5也可以由下面的式子求得：

0．5＝0×0.999＋500×0.001.

类比必修第二册“统计”一章中求样本平均数的方法(＝*x*1*p*1＋*x*2*p*2＋ … ＋*xnpn*，其中*pi*为*xi*的频率值)，可以得到，

一般地，离散型随机变量*X*的概率分布如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *x*1 | *x*2 | … | *xn* |
| *P* | *p*1 | *p*2 | … | *pn* |

其中，*pi*≥0,*i*＝1,2,…，*n,p*1＋*p*2＋…＋*pn*＝1，则称*x*1*p*1＋*x*2*p*2＋…＋*xnpn*为随机变量*X*的均值或数学期望，记为*E*(*X*)或*μ*.即

*E*(*X*)＝*x*1*p*1＋*x*2*p*2＋ … ＋*xnpn*.

数学期望(均值)是随机变量的一个重要数字特征，它是随机变量可能取值关于取值概率的加权平均数，综合了随机变量的取值和取值的概率，反映了随机变量取值的平均水平或分布的***“***集中趋势***”．***均值在实际生活中有着广泛的应用，如通过均值进行估计、比较均值选择方案等．[2]

巩固概念：甲、乙两名工人生产同一种产品，在相同的条件下，他们生产100件产品所出的不合格品数分别用*X*1,*X*2表示，*X*1,*X*2的概率分布如表所示．问：如何比较甲、乙两名工人的技术？

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X*1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *pk* | 0.7 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| *X*2 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *pk* | 0.5 | 0.3 | 0.2 | 0 |

解答如下：

*E*(*X*1)＝0×0.7＋1×0.1＋2×0.1＋3×0.1＝0.6，

*E*(*X*2)＝0×0.5＋1×0.3＋2×0.2＋3×0＝0.7.

由于*E*(*X*1)<*E*(*X*2)，即甲工人生产出的不合格品数的均值小，从这个意义上讲，甲的技术比乙的技术好．

**2.**两点分布的数学期望

如果随机变量*X*～两点分布：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 |
| *P* | 1－*p* | *p* |

那么*E*(*X*)＝0×(1－*p*)＋1×*p*＝*p*.

**3**．离散型随机变量的均值的性质

如果*X*是一个离散型随机变量，将*X*进行平移(*X*＋*b*)或伸缩(*aX*)后，其均值会发生变化．

设*X*的概率分布如下表：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *x*1 | *x*2 | … | *xn* |
| *P* | *p*1 | *p*2 | … | *pn* |

根据随机变量均值的定义，

*E*(*X*＋*b*)＝(*x*1＋*b*)*p*1＋(*x*2＋*b*)*p*2＋ …

＋(*xn*＋*b*)*pn*

＝(*x*1*p*1＋*x*2*p*2＋…＋*xnpn*)

＋*b*(*p*1＋*p*2＋…＋*pn*)

＝*E*(*X*)＋*b*.

类似地，可以证明*E*(*aX*)＝*aE*(*X*)．

一般地，有下面的结论：

*E*(*aX*＋*b*)＝*aE*(*X*)＋*b*.

三、 数学运用

例1　抛掷一颗质地均匀的骰子，设出现的点数为*X*，求*X*的均值．[3]

(见学生用书课堂本P67)

[处理建议]　先求出*X*的分布列，再根据定义计算*X*的均值．

[规范板书]　解　*X*的概率分布为

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *P* |  |  |  |  |  |  |

因此，*E*(*X*)＝(1＋2＋3＋4＋5＋6)＝3.5.

[题后反思]　求离散型随机变量的均值一般分为四步：(1)确定*X*的可能取值；(2)计算出*P*(*X*＝*k*)；(3)写出分布列；(4)利用*E*(*X*)的计算公式计算*E*(*X*)．其中正确写出分布列是求均值的关键．

　袋中有4只红球、3只黑球，今从袋中随机取出4只球，设取到一只红球得2分，取到一只黑球得1分，试求得分*X*的均值．

[规范板书]　解　取出4只球颜色及得分分布情况是：4红得8分，3红1黑得7分，2红2黑得6分，1红3黑得5分，因此，

*P*(*X*＝5)＝＝， *P*(*X*＝6)＝＝，

*P*(*X*＝7)＝＝， *P*(*X*＝8)＝＝.

故*X*的分布列如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 5 | 6 | 7 | 8 |
| *P* |  |  |  |  |

*E*(*X*)＝5×＋6×＋7×＋8×＝(分)．

[题后反思]　均值(数学期望)是随机变量的一个重要的数字特征，它反映了随机变量取值的平均水平，因此，随机变量的均值与随机变量本身具有相同的单位．

　某一智力游戏玩一次所得的积分是一个随机变量*X*，其概率分布如下表所示，均值*E*(*X*)＝2，则*ab*＝　　.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 3 | 6 |
| *P* |  | *a* | *b* |

[处理建议]　利用分布列的性质以及均值的计算公式建立方程组求解．

[规范板书]　解　根据题意可得方程组解得从而*ab*＝.

例2　(教材P109例2)在一个人数很多的地区普查某种疾病，由以往经验知道，该地区居民得此病的概率为0.1%.现有1000人去验血，给出下面两种化验方法．

方法1：对1000人逐一进行化验；

方法2：将1000人分成100组，每组10人．对于每个组，先将10人的血各取出部分，并混合在一起进行一次化验，如果呈阴性，那么可断定这10人均无此疾病；如果结果呈阳性，那么再逐一化验．

试问：哪种方法较好？[4]

(见学生用书课堂本P68)

[处理建议]　引导学生选择合适的评判标准，即选择怎样的随机变量来刻画检测方法的优劣．

[规范板书]　解　第1种方法的化验次数为1000.

第2种方法：如果一组的混合血液化验结果是阴性的，就可以断定这10个人均无此疾病，那么这10个人只需化验1次．

如果结果呈阳性，那么必须对这10个人逐个分别化验，这时对这10个人共需进行11次化验．因为对所有人来说，化验结果呈阳性的概率均为0.001，而且这些人的化验结果是相互独立的，所以每个人的化验次数*X*的概率分布如下表所示．

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* |  |  |
| *P* | (1－0.001)10 | 1－(1－0.001)10 |

所以，每个人化验次数*X*的均值为

*E*(*X*)＝×(1－0.001)10＋×[1－(1－0.001)10]．

故1000个人的化验次数的均值为

1000×

＝1100－1000×0.99910≈110.

所以，方法2远好于方法1.

[题后反思]　(1) 对于第2种化验方法，关键是求出每个人化验次数的均值，从而得到1000个人化验次数的均值．(2)解答此类实际应用题的步骤：①把实际问题概率模型化；②确定分布列，计算随机变量的均值；③利用所得数据，对实际问题做出判断．

　受轿车在保修期内维修费等因素的影响，企业生产每辆轿车的利润与该轿车首次出现故障的时间有关．某轿车制造厂生产甲、乙两种品牌轿车，保修期均为2年，先从该厂已售出的两种品牌轿车中随机抽取50辆，统计数据如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 品　牌 | 甲 | 乙 |
| 首次出现故障时间*x*/年 | 0＜*x*≤1 | 1＜*x*≤2 | *x*＞2 | 0＜*x*≤1 | *x*＞2 |
| 轿车数量/辆 | 2 | 3 | 45 | 5 | 45 |
| 每辆利润/万元 | 1 | 2 | 3 | 1.8 | 2.9 |

将频率视为概率，解答下列问题：

(1) 从该厂生产的甲品牌轿车中随机抽取一辆，求其首次出现故障发生在保修期内的概率；

(2) 若该厂生产的轿车均能售出，记生产一辆甲品牌轿车的利润为*X*1，生产一辆乙品牌轿车的利润为*X*2，分别求*X*1，*X*2的分布列；

(3) 该厂预计今后这两种品牌轿车销售量相当，由于资金限制，只能生产其中一种品牌轿车，若从经济效益的角度考虑，你认为应该生产哪种品牌的轿车？说明理由．

[规范板书]　解　(1) 设“甲品牌轿车首次出现故障发生在保修期内”为事件*A*，则*P*(*A*)＝＝.

(2) 依题意得，*X*1的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X*1 | 1 | 2 | 3 |
| *P* |  |  |  |

*X*2的分布列为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X*2 | 1.8 | 2.9 |
| *P* |  |  |

(3) 由(2)得*E*(*X*1)＝1×＋2×＋3×＝2.86(万元)，

*E*(*X*2)＝1.8×＋2.9×＝2.79(万元)．

因为*E*(*X*1)＞*E*(*X*2)，所以应生产甲品牌轿车．

例3　人寿保险中(某一年龄段)，在1年的保险期内，每个被保险人需交纳保险费*a*元，被保险人意外死亡则保险公司赔付3万元，出现非意外死亡则赔付1万元．经统计此年龄段1年内意外死亡的概率是*p*1，非意外死亡的概率是*p*2，则*a*需要满足什么条件，保险公司才能盈利？

[规范板书]　解　设*X*为盈利数，其分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | *a* | *a*－30000 | *a*－10000 |
| *P* | 1－*p*1－*p*2 | *p*1 | *p*2 |

*E*(*X*)＝*a*(1－*p*1－*p*2)＋(*a*－30000)*p*1＋(*a*－10000)*p*2

＝*a*－30000*p*1－10000*p*2.

要盈利，至少需使*X*的数学期望大于0,由*a*－30000*p*1－10000*p*2>0,故*a*>30000*p*1＋10000*p*2.

四、 课堂练习

1．已知离散型随机变量*X*的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 | 3 |
| *P* |  |  |  |

则*X*的数学期望*E*(*X*)等于(A)

A. B. 2

C. D. 3

2．已知离散型随机变量*X*的概率分布如下表：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | －1 | 0 | 1 | 2 |
| *P* | 0.2 | 0.3 | 0.3 | 0.2 |

则*E*(*X*＋1)＝\_\_1.5\_\_,*E*(2*X*)＝\_\_1\_\_.

3．一台机器生产某种产品，如果生产一件甲等品可获利50元，生产一件乙等品可获利30元，生产一件次品会亏损20元．已知这台机器生产甲等品、乙等品和次品的概率分别为0.6, 0.3和0.1，则这台机器每生产一件产品的平均预期收入为\_\_37\_\_元．

提示　50×0.6＋30×0.3－20×0.1＝37(元)．

4．口袋中装有5个球，编号分别为1,2,3,4,5，从中任取3个球，以*ξ*表示取出球的最大号码，求*E*(*ξ*)．

解　由题意知*ξ*的可能取值为3,4,5,且*P*(*ξ*＝3)＝0.1,*P*(*ξ*＝4)＝0.3,*P*(*ξ*＝5)＝0.6，故*E*(*ξ*)＝3×0.1＋4×0.3＋5×0.6＝4.5.

五、 课堂小结

1．离散型随机变量的均值(数学期望)计算公式及其意义．

2．离散型随机变量均值的性质：*E*(*aX*＋*b*)＝*aE*(*X*)＋*b*.

3．会用均值对实际问题做出正确的分析.



[1] 在进行分析时，要让学生感受到是从“长期购买”彩票的前提下，得奖与不得奖的“概率”的角度思考问题的．这就要把一次购买的随机性与长期购买时频率的趋势的稳定性之间的关系理解清楚．

[2] 教学中不要把如何计算均值、方差作为教学的重点，而应关注对其本质的理解以及均值、方差在解决实际问题中的作用.

[3] 利用定义求离散型随机变量的均值.

[4] 本例是均值的实际应用，运用所学的知识解决实际问题，增强学好概率知识的兴趣．