第2课时　全概率公式



知识技能

结合古典概型，会利用全概率公式计算概率．

思想方法

在将较复杂事件的概率转化为较简单事件的概率的过程中，感受化整为零、转化化归思想．

核心素养

1．通过韦恩图理解全概率公式，发展直观想象素养．

2．在用互斥事件概率的加法公式和概率的乘法公式推导全概率公式及运用全概率公式计算概率的过程中，发展逻辑推理和数学运算素养．



全概率公式的理解及运用．



问题导引

预习教材P96～97，思考下面的问题：

1．互斥事件的概率加法公式是什么？概率的乘法公式是什么？

2．什么是全概率公式？如何理解？

即时体验

1．若事件*A*1, *A*2互斥，且*A*1＋*A*2＝*Ω*， *P*(*A*1) ＞0, *P*(*A*2) ＞0，则对于*Ω*中的任意事件*B*，由全概率公式得*P*(*B*)＝\_\_*P*(*A*1)*P*(*B*|*A*1)＋\_*P*(*A*2)*P*(*B*|*A*2)\_\_\_.

2．判断(正确的打“√”，错误的打“×”)：

(1) 若*P*(*A*)＞0,*P*()＞0，则*P*(*B*)＝*P*(*A*)·*P*(*B*|*A*)＋ *P*()*P*(*B*|)；(√)

(2) 若*A*1, *A*2, *A*3互斥，且*P*(*A*1) ＞0, *P*(*A*2) ＞0, *P*(*A*3) ＞0，则*P*(*B*)＝(Ai)P(B|Ai)；(×)

(3) 运用全概率公式的关键在于将样本空间分成两两互斥的几个部分．(√)

3．某厂用甲、乙两台机器生产同样的零件，它们的产量分别占45%, 55%，而各自的产品中废品率分别为3%, 2%.则该厂这种零件的废品率为 \_\_2.45%\_\_.

提示　45%×3%＋55%×2%＝1.35%＋1.10%＝2.45%.



一、 问题情境[1]

甲袋中有4个红球和2个白球，乙袋中有3个红球和3个白球．先随机取一只袋子，再从该袋中随机取一个球，该球为红球的概率是多少？

问题探究：随机取一只袋，设取到的是甲袋为事件*A*1，取到的是乙袋为事件*A*2，再从袋中随机取一个球，取出的球是红球为事件*B*，则事件*B*有两类：取出的是甲袋且从中取出的是红球，取出的是乙袋且从中取出的是红球，即*B*＝*A*1*B*＋*A*2*B*(如图1所示)．



图1

因为*A*1*B*与*A*2*B*互斥，所以由互斥事件的概率加法公式得

*P*(*B*)＝*P*(*A*1*B*＋*A*2*B*)＝*P*(*A*1*B*)＋*P*(*A*2*B*)．

从而，再由概率的乘法公式得

*P*(*B*)＝*P*(*A*1*B*)＋*P*(*A*2*B*)

＝*P*(*A*1)*P*(*B*|*A*1)＋ *P*(*A*2)*P*(*B*|*A*2)．

又因为*P*(*A*1)＝， *P*(*B*|*A*1)＝＝， *P*(*A*2)＝， *P*(*B*|*A*2)＝＝，

所以*P*(*B*)＝×＋×＝.

因此，该球为红球的概率为.

二、 数学建构

上述过程采用的方法是：按照某种标准，将一个复杂事件表示为两个互斥事件的和(并)，再由概率的加法公式和乘法公式求得这个复杂事件的概率．

一般地，若事件*A*1, *A*2, …， *An*两两互斥，且它们的和i＝Ω，P(Ai)>0,i＝1,2,…，n，则对于*Ω*的任意事件*B*，有

P(B)＝(BAi)＝(Ai)P(B|Ai)．

这个公式称为全概率公式．

全概率公式是概率论中的重要公式，理解此公式应注意以下几点：

(1) *A*1, *A*2, …， *An*是伴随事件*B*发生的事件组，且满足三个条件：①*A*1, *A*2, …， *An*两两互斥；②*A*1＋*A*2＋ … ＋*An*＝*Ω*； ③*P*(*Ai*)＞0.尤其要注意第②条，必须满足第②条才能称为“全”(概率公式)．

(2) 公式的直观解释：已知事件*B*的发生有各种可能的情形*Ai*(即前提条件)，事件*B*发生的概率，就是各种可能情形*Ai*发生的概率与已知在*Ai*发生的条件下事件*B*发生的概率的乘积之和．

(3) 在实际问题中，有时很难直接求得事件*B*发生的概率，我们可以分析事件*B*发生的各种可能情形，化整为零地去分解事件*B*(*B*＝*BA*1＋ *BA*2＋…＋ *BAn, n*＝3时的情形如图2所示)，从而借助全概率公式间接求出事件*B*发生的概率.



图2

三、 数学运用

例1　某次社会实践活动中，甲、乙两个班的同学共同在一个社区进行民意调查．参加活动的甲、乙两班的人数之比为5∶3，其中甲班中女生占，乙班中女生占.求该社区居民遇到一位进行民意调查的同学恰好是女生的概率．[2]

(见学生用书课堂本P61)

[处理建议]　引导学生先用适当的符号表示已知条件，求出相应事件的概率，然后根据全概率公式求解．

[规范板书]　解　用*A*1,*A*2分别表示居民遇到的一位进行民意调查的同学是甲班的与乙班的事件，*B*表示居民遇到的一位进行民意调查的同学是女生的事件，显然*A*1,*A*2互斥，且*A*1＋*A*2＝*Ω*.

由题意可知，*P*(*A*1)＝＝，*P*(*A*2)＝1－＝，*P*(*B*|*A*1)＝，*P*(*B*|*A*2)＝.由全概率公式，得*P*(*B*)＝*P*(*A*1) *P*(*B*|*A*1)＋ *P*(*A*2) *P*(*B*|*A*2)＝×＋×＝.

[题后反思]　(1) 运用全概率公式的步骤：①用字母表示分拆事件(*A*1, *A*2)和所求事件(*B*)；②求出各分拆事件的概率和条件概率；③根据全概率公式求解．

(2) 本例也可以这样来理解：假设参加活动的甲班人数为5*n*，则乙班人数为3*n,*而且甲班中有女生3*n*人，乙班中有女生*n*人．从而可知参加活动的总共有5*n*＋3*n*＝8*n*人，而女生有3*n*＋*n*＝4*n*人，因此所求概率为＝.

　学校举行演讲比赛，共有20名同学参加，学校决定让参赛选手通过抽签决定出场顺序．不过，刘帅同学对抽签的公平性提出了质疑，他的理由是，如果第一个人抽的出场顺序是1号，那么其他人就抽不到1号了，所以每个人抽到1号的概率不一样．刘帅的想法正确吗？特别地，第一个抽签的人抽到1号的概率与第二个抽签的人抽到1号的概率是否相等？为什么？

[处理建议]　利用全概率公式进行严格的推导．

[规范板书]　解　设*Ai*表示第*i*个抽签的人抽到1号，*i*＝1,2.由题意知

*P*(*A*1)＝， *P*(1)＝.

如果第1个抽签人抽到1号，那么第2个人抽到1号的概率为0，即*P*(*A*2|*A*1)＝0；如果第1个抽签人抽到的不是1号，那么第2个人抽到1号的概率为，即*P*(*A*2|1)＝.因此，

*P*(*A*2)＝*P*(*A*1)*P*(*A*2|*A*1)＋ *P*(1)*P*(*A*2|1)

＝×0＋×＝.

这就是说*P*(*A*1) ＝*P*(*A*2)．因此抽签是公平的，刘帅的想法不正确.

例2　(教材P97例4)设甲袋有3个白球和4个红球，乙袋有1个白球和2个红球．现从甲袋中任取2个球放入乙袋，再从乙袋中任取2个球，求从乙袋中取出的是2个红球的概率．[3]

(见学生用书课堂本P62)

[处理建议]　关键对“从甲袋中任取2个球”进行分解，使得“再从乙袋中任取2个球”的前提得以确定．

[规范板书]　解　记事件*A*1：从甲袋中取出2个红球，事件*A*2：从甲袋中取出2个白球，事件*A*3：从甲袋中取出1个白球和1个红球，事件*B*：从乙袋中取出2个红球．

显然，*A*1,*A*2,*A*3两两互斥，且*A*1＋*A*2＋*A*3正好为“从甲袋中任取2个球”的样本空间*Ω*.

由全概率公式，得

P(B)＝(*Ai*)*P*(*B*|*A*i)＝*P*(*A*1)*P(B*|*A*1)

＋P(A2)P(B|A2)＋P(A3)P(B|A3)

＝·＋·＋·＝.

答： 从乙袋中取出的是2个红球的概率为.

[题后反思]　(1)例1、例2分别对样本空间进行二次拆解和三次拆解，本质上是一样的．在解题时重点关注两点：一是拆解的事件是否互斥，二是这些事件的“和”是否是样本空间*Ω*.(2)对样本空间进行拆解，是为了将不好处理的问题转化为前提确定了的情形，从而便于列出事件所对应的样本点．

　假设某市场供应的智能手机中，市场占有率和优质率的信息如下表所示．

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 品　牌 | 甲 | 乙 | 其他 |
| 市场占有率 | 50% | 30% | 20% |
| 优质率 | 95% | 90% | 70% |

在该市场中任意买一部智能手机，求买到的是优质品的概率．

[规范板书]　解　用*A*1, *A*2, *A*3分别表示买到的智能手机为甲品牌、乙品牌、其他品牌，*B*表示买到的是优质品，则依据已知可得

*P*(*A*1)＝50%, *P*(*A*2)＝30%, *P*(*A*3)＝20%，

且

*P*(*B*|*A*1)＝95%, *P*(*B*|*A*2)＝90%, *P*(*B*|*A*3)＝70%.

因此，由全概率公式，得

*P*(*B*)＝*P*(*A*1)*P*(*B*|*A*1)＋*P*(*A*2)*P*(*B*|*A*2)

＋*P*(*A*3)*P*(*B*|*A*3)

＝50%×95%＋30%×90%＋20%×70%

＝88.5%.

例3　有3台车床加工同一型号的零件，第1台加工的次品率为6%，第2, 3台加工的次品率均为5%，加工出来的零件混放在一起．已知第1, 2, 3台车床加工的零件数分别占总数的25%, 30%, 45%.

(1) 任取一个零件，计算它是次品的概率；

(2) 如果取到的零件是次品，计算它是第*i*(*i*＝1, 2, 3)台车床加工的概率．[4]

[处理建议]　取到的零件可能来自第1台车床，也可能来自第2台或第3台车床，有3种可能．设*B*＝“任取一零件为次品”，*Ai*＝“零件为第*i*台车床加工”(*i*＝1, 2, 3)，利用全概率公式可以计算出事件*B*的概率．

[规范板书]　解　设事件*B*＝“任取一件为次品”，事件*Ai*＝“零件为第*i*台车床加工”(*i*＝1, 2, 3)，显然*A*1, *A*2, *A*3两两互斥，且*A*1＋*A*2＋*A*3＝*Ω*.根据题意得

*P*(*A*1)＝0.25,*P*(*A*2)＝0.3,*P*(*A*3)＝0.45,

*P*(*B*|*A*1)＝0.06,*P*(*B*|*A*2)＝*P*(*B*|*A*3)＝0.05.

(1) 由全概率公式，得

*P*(*B*)＝*P*(*A*1)*P*(*B*|*A*1)＋*P*(*A*2)*P*(*B*|*A*2)

＋*P*(*A*3)*P*(*B*|*A*3)

＝0.25×0.06＋0.3×0.05＋0.45×0.05

＝0.0525.

(2) “如果取到的零件是次品，计算它是第*i*(*i*＝1, 2, 3)台车床加工的概率”，就是计算在*B*发生的条件下，事件*Ai*发生的概率．

*P*(*A*1|*B*)＝＝

＝＝.

类似地，可得*P*(*A*2|*B*)＝，*P*(*A*3|*B*)＝.

[题后反思]　(1)第(2)问求条件概率时，运用概率的乘法公式*P*(*AB*)＝*P*(*B*|*A*)*P*(*A*)＝*P*(*A*|*B*)*P*(*B*)对分子进行了转化．(2)将第(2)问一般化，可以得到贝叶斯公式(不作考试要求)，贝叶斯公式实际上是利用概率的乘法公式和全概率公式将条件概率公式进行变形的结果．(3)拓展：本例中，*P*(*Ai*)，*P*(*Ai*|*B*)的实际意义是什么？*P*(*Ai*)是试验之前就已知的概率，它是第*i*台车床加工的零件所占的比例，称为先验概率．当已知抽到的零件是次品(*B*发生)，*P*(*Ai*|*B*)是这件次品来自第*i*台车床加工的可能性大小，通常称为后验概率．如果对加工的次品，要求操作员承担相应的责任，那么，，就分别是第1, 2, 3台操作员应承担的份额．

　同一种产品由甲、乙、丙三个厂供应．由长期的经验知，三家的正品率分别为0.95, 0.90, 0.80，三家产品数按2∶3∶5的比例混合在一起．

(1) 从中任取一件，求此产品为正品的概率；

(2) 现取到一件产品为正品，问：它是由甲、乙、丙三个厂中哪个厂生产的可能性大？

[规范板书]　解　设事件*A*表示“取到的产品为正品”，*B*1, *B*2, *B*3分别表示“产品由甲、乙、丙厂生产”，

由已知*P*(*B*1)＝0.2, *P*(*B*2)＝0.3, *P*(*B*3)＝0.5，

*P*(*A*|*B*1)＝0.95, *P*(*A*|*B*2)＝0.9, *P*(*A*|*B*3)＝0.8.

(1) 由全概率公式得

P(A)＝(Bi)P(A|Bi)

 ＝0.2×0.95＋0.3×0.9＋0.5×0.8＝0.86.

(2) 由条件概率及概率的乘法公式得

*P*(*B*1|*A*)＝＝≈0.2209，

*P*(*B*2|*A*)＝＝≈0.3140，

*P*(*B*3|*A*)＝＝≈0.4651.

由以上3个数作比较，可知这件产品由丙厂生产的可能性最大，由甲厂生产的可能性最小．

四、 课堂练习

1．已知*P*(*A*)＝0.4,*P*(*B*|*A*)＝0.25,*P*(*B*|)＝0.3，则*P*(*B*)＝\_\_0.28\_\_.

提示　由全概率公式知*P*(*B*)＝*P*(*A*)*P*(*B*|*A*)＋*P*()*P*(*B*|)＝0.4×0.25＋(1－0.4)×0.3＝0.28.

2. 两台车床加工同样的零件，第一台出现废品的概率为0.03，第二台出现废品的概率为0.02，加工出来的零件放在一起．现已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍，则任意取出一个零件是合格品的概率是(C)

A. B.

C. D.

提示　设*Ai*＝“任意取出一个零件是第*i*台车床生产的”，*i*＝1,2,*B*＝“任意取出一个零件是合格品”，显然*A*1,*A*2互斥，且*A*1＋*A*2＝*Ω*.由全概率公式得*P*(*B*)＝*P*(*A*1)*P*(*B*|*A*1)＋ *P*(*A*2)*P*(*B*|*A*2)＝(1－0.03)＋(1－0.02)＝.

3．有一批同型号的产品，已知其中由一厂生产的占20%，二厂生产的占30%，三厂生产的占50%，又知这三个厂的产品次品率分别为1%, 2%, 1%，问：从这批产品中任取一件是次品的概率是多少？

解　设 “从这批产品中任取一件是次品” 为事件*A*，“从这批产品中任取一件是*i*厂生产的产品” 为事件*Bi, i*＝1,2,3.显然*B*1,*B*2,*B*3两两互斥，且*B*1＋*B*2＋*B*3＝*Ω*.

由题意知*P*(*B*1)＝0.2,*P*(*B*2)＝0.3,*P*(*B*3)＝0.5，

*P*(*A*|*B*1)＝0.01,*P*(*A*|*B*2)＝0.02,*P*(*A*|*B*3)＝0.01.

由全概率公式得

*P*(*A*)＝*P*(*B*1)*P*(*A*|*B*1)＋*P*(*B*2)*P*(*A*|*B*2)

＋*P*(*B*3)*P*(*A*|*B*3)

＝0.2×0.01＋0.3×0.02＋0.5×0.01

＝0.013.

因此，从这批产品中任取一件是次品的概率是0.013.

五、 课堂小结

1．全概率公式

*P*(*B*)＝(*Ai*)*P*(*B*|*Ai*)．其中事件*A*1, *A*2, …， *An*两两互斥，且它们的和*i*＝Ω.

全概率公式是概率论中的重要公式，它将复杂事件的概率求解问题转化为了在不同情况下发生的简单事件的概率求和问题．

2．思想方法：化整为零、转化化归．

3．易错点：事件拆分不合理或不全面.



[1] 先从具体的较简单问题出发，然后一般化得出全概率公式.

[2] 例1是两个事件的全概率问题．

[3] 例2是多个事件的全概率问题．

[4] 本例是全概率公式与条件概率的综合应用问题．