第3课时　离散型随机变量及其分布列(1)



知识技能

1．通过具体实例，了解随机变量、离散型随机变量的概念．

2．理解取有限值的离散型随机变量的概率分布的概念，会求简单的离散型随机变量的概率分布．

3．理解两点分布(0-1分布)．

思想方法

将随机变量的定义与函数的定义进行类比，理解“样本点的数量化”．

核心素养

1．在用函数思想研究概率问题及理解相关概念的过程中，发展数学抽象素养．

2．通过对概率模型两点分布(01分布)的理解，发展数学建模素养．



重点：理解离散型随机变量及其分布列的概念，求解简单离散型随机变量的概率分布．

难点：与函数类比理解随机变量．



问题导引

预习教材P102～105，思考下面的问题：

1．随机变量是如何定义的？你能说出随机变量定义与函数定义的相同点与不同点吗？

解　一般地，对于随机试验样本空间*Ω*中的每个样本点*ω*，都有唯一的实数*X*(*ω*)与之对应，则称*X*为随机变量．

相同点：都是集合与集合之间的对应关系，随机变量定义中的样本点*ω*相当于函数定义中的自变量，而样本空间*Ω*相当于函数的定义域．

不同点：*Ω*不一定是数集．

2．你能各举出一个离散型随机变量和连续型随机变量的例子吗？

3.随机变量的概率分布如何表示？

解　*P*(*X*＝*xi*)＝*pi,i*＝1,2,…，*n*，或

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *x*1 | *x*2 | … | *xn* |
| *P* | *p*1 | *p*2 | … | *pn* |

即时体验

1．抛掷一颗质地均匀的骰子，观察朝上一面的点数，若用*X*表示这个点数，则*X*的可能取值为\_\_1,2,3,4,5,6\_\_.

2．口袋中装有编号分别为1,2,3,4的4只小球，若从中任取1只球，记取到的小球的编号为*X*，则*P*(*X*＝1)表示\_\_取到的小球的编号为1的概率\_\_.

提示　当取到的小球的编号为1时，*X*＝1.

3．判断(正确的打“√”，错误的打“×”)：

(1) 随机变量的取值可以是有限个，也可以是无限个；(√)

(2) 随机变量的概率分布给出了随机试验所有基本事件对应的概率；(√)

(3) 某品牌节能灯的寿命*X*是离散型随机变量．(×)



一、 问题情境

为了督促各地做好环境保护工作，环保部门决定在34个省级行政区中，随机抽取6个进行突击检查，抽取到的省级行政区只要有一个不同就认为是不同的试验结果，记样本空间为*Ω*.

(1) *Ω*中包含的样本点数目是多少？

(2) 设抽得的省级行政区中直辖市个数为*X*，那么对*Ω*中的每一个样本点，*X*都有唯一确定的值吗？*X*的取值是固定不变的吗？如果不是，*X*可取的值有哪些？

分析：

(1) 借助组合的知识，可知*Ω*所包含的样本点数目为C.

(2) 我国只有北京市、上海市、天津市、重庆市这4个直辖市，而随机选取的是6个省级行政区，因此对样本空间*Ω*中的每一个样本点，变量*X*都有唯一的取值，但对不同的样本点，*X*的取值可能不同，其值可以是0,1,2,3,4中的任意一个．

二、 数学建构

**1**．随机变量

“问题情境”说明样本点与实数存在某种对应关系(即样本空间与实数集之间存在某种对应)，事实上，很多情况下的样本点容易与实数建立对应关系．

有些随机试验的样本点与数值有关系，我们可以直接与实数建立对应关系，例如：

(1) 在一块地里种下10棵树苗，用实数*m*(*m*＝0,1,2,…，10)表示“成活树苗的棵数”；

(2) 抛掷两颗骰子，观察向上的点数，样本空间为*Ω*＝{(*x,y*)|*x,y*＝1,2,…，6}，用*x*＋*y*表示“两颗骰子向上的点数之和”，那么样本点(*x,y*)就与实数*x*＋*y*对应；

(3) 接听一个电话，用*t*(*t*∈(0,＋∞))表示“通话时长”．

有些随机试验的样本点与数值没有直接关系，我们可以根据问题的需要为每个样本点指定一个数值，例如：

(4) 抛掷一枚硬币，将试验结果“正面向上”用1表示，“反面向上”用0表示；

(5) 抽查学生的某项体育测试成绩，将成绩登记为优、良、中、及格、不及格分别用数值5,4,3,2,1来表示．

由此可以看出，对于任何一个随机试验，总可以把它的每个样本点与一个实数对应，这时我们可通过引入一个取值依赖于样本点的变量*X*(如“问题情境”中的*X*)，来建立样本点和实数的对应关系，从而实现了样本点的数量化．由于随机试验中样本点的出现具有随机性，所以变量*X*的取值也具有随机性．

一般地，对于随机试验样本空间*Ω*中的每个样本点*ω*，都有唯一的实数*X*(*ω*)与之对应，则称*X*为随机变量[1]．通常用大写英文字母*X,Y,Z*(或小写希腊字母*ξ*，*η*，*ζ*)等表示随机变量，而用小写英文字母*x,y,z*(加上适当下标)等表示随机变量的取值．例如，上面(1)中用变量*X*表示成活树苗的棵数，则*X*的可能取值为0,1,2, …， 10，共11个．

理解概念：

(1) 随机变量的取值*X*(*ω*)随着试验结果(样本点)*ω*的变化而变化，其取值依赖于样本点，并且所有可能取值是明确的．

(2) 类比函数理解随机变量：随机变量是建立在*Ω*到**R**的对应，这里的样本点*ω*相当于函数定义中的自变量，而样本空间*Ω*相当于函数的定义域，不同的是*Ω*不一定是数集．

巩固概念：(教材P103例1)下列变量中哪些是随机变量？如果是随机变量，那么可能的取值有哪些？

(1) 一个实验箱中装有标号为1,2,3,3,4的5只白鼠，从中任取1只，记取到的白鼠的标号为*X*；

(2) 明天的降雨量*L*(单位：mm)；

(3) 先后抛掷一枚质地均匀的硬币两次，正面向上的次数*X*.

分析：(1) 根据条件可知， *X*是随机变量，可能的取值是1,2,3,4.

(2) 降雨量具有一定的随机性，所以*L*是随机变量，可能的取值有无数多个，可以是

(3) 用H表示“正面向上”，T表示“反面向上”，则样本空间为{HH,HT,TH,TT}．正面向上(即出现H)的次数*X*是随机变量，取值是0, 1, 2.

由上例可知，(1)中*X*的可能取值为1,2,3,4，共有4个值；(3)中*X*的可能取值为0,1,2，共有3个值．像这种取值为离散的数值的随机变量称为离散型随机变量．而(2)中取值为连续的实数区间(具有这种特点的随机变量称为连续型随机变量．

又由上例可知，引入随机变量后，我们可以比较方便地表示随机事件[2]：(1)中随机事件“从装有标号为1,2,3,3,4的5只白鼠的实验箱中任取1只，取到1号白鼠”可以表示为{*X*＝1}，而随机事件{*X*＜3}表示“从装有标号为1,2,3,3,4的5只白鼠的实验箱中任取1只，取到1号或2号白鼠”，这样复杂的随机事件也可以用随机变量的取值来表示．

***2***．随机变量的概率分布

既然随机事件可以用随机变量表示，那么随机事件发生的概率就可以用随机变量的取值的概率表示了．

例如，掷一枚质地均匀的骰子，*X*表示掷出的点数，*X*的可能取值为1,2,3,4,5,6，则事件“掷出5点”可以表示为{*X*＝5}，事件“掷出的点数不大于3”可以表示为{*X*≤3}，事件“掷出奇数点”可以表示为{*X*＝1}∪{*X*＝3}∪{*X*＝5}，等等．由掷出各种点数的等可能性，可得*P*(*X*＝*m*)＝，*m*＝1,2,3,4,5,6.这一规律可以用下表来描述．

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *P* |  |  |  |  |  |  |

一般地，随机变量*X*有*n*个不同的取值，它们分别是*x*1,*x*2,…，*xn*，且

*P*(*X*＝*xi*)＝*pi,i*＝1,2,…，*n*，①

则称①为随机变量*X*的概率分布列，简称为*X*的分布列．也可以将①用下表的形式来表示：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *x*1 | *x*2 | … | *xn* |
| *P* | *p*1 | *p*2 | … | *pn* |

我们将此表称为随机变量*X*的概率分布表．它和①都叫作随机变量*X*的概率分布[3]．

随机变量的概率分布不仅能清楚地反映随机变量的所有可能取值，而且能清楚地看到取每一个值的概率的大小，从而反映了随机变量在随机试验中取值的分布情况，是进一步研究随机变量的数字特征(均值、方差)的基础．

**3**．随机变量的概率分布的性质

随机变量的概率分布给出了随机试验所有基本事件对应的概率，因此，这里的*pi*(*i*＝1, 2, …， *n*)满足条件：

①*pi*≥0; ②*p*1＋*p*2＋ … ＋*pn*＝1.

①②即为离散型随机变量的概率分布的两个性质．利用这两个性质可以：(1)检查写出的分布列是否正确；(2)在求分布列中的某些参数时，可以利用其概率和为1这一条件列出方程求出参数．

三、 数学运用

例1　写出下列随机变量可能的取值，并说明这些值所表示的随机试验的结果．

(1) 袋中有大小相同的10个红球和5个白球，从袋中每次任取1个球， 取后不放回， 直到取出的球是白球为止，所需要的取球次数．

(2) 从分别标有数字1, 2, 3, 4, 5, 6的6张卡片中任取2张，所取2张卡片上的数字之和．[4]

(见学生用书课堂本P63)

[处理建议]　引导学生认真读题、理解题意，正确写出随机变量可能的取值．

[规范板书]　解　(1) 设所需要的取球次数为*X*，则*X*＝1, 2, 3, 4, …， 10, 11. *X*＝*i*表示前(*i*－1)次取到的均是红球， 第*i*次取到白球， 这里*i*＝1, 2, 3, 4, …， 11.

(2) 设所取2张卡片上的数字之和为*X*，则*X*＝3, 4, 5, …， 11.

*X*＝3，表示“取出标有数字1, 2的两张卡片”；

*X*＝4，表示“取出标有数字1, 3的两张卡片”；

*X*＝5，表示“取出标有数字2, 3或1, 4的两张卡片”；

*X*＝6，表示“取出标有数字2, 4或1, 5的两张卡片”；

*X*＝7，表示“取出标有数字3, 4或2, 5或1, 6的两张卡片”；

*X*＝8，表示“取出标有数字2, 6或3, 5的两张卡片”；

*X*＝9，表示“取出标有数字3, 6或4, 5的两张卡片”；

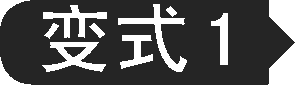
*X*＝10，表示“取出标有数字4, 6的两张卡片”；

*X*＝11, 表示“取出标有数字5, 6的两张卡片”．

[题后反思]　解答用随机变量表示随机试验的结果问题的关键点和注意点：

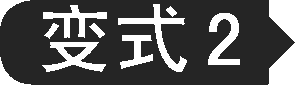
(1) 关键点：明确随机变量的所有可能取值，以及取每一个值对应的意义，即一个随机变量的取值对应一个或多个随机试验的结果(样本点)．

(2) 注意点：解答过程中不要漏掉某些试验结果．

　若本例(2)中条件不变，所取2张卡片上的数字之差的绝对值为随机变量*Y*，那么*Y*有哪些取值？ 其中*Y*＝4表示什么含义？

[规范板书]　解　*Y*的所有可能取值有：1, 2, 3, 4, 5.

*Y*＝4表示“取出标有1, 5或2, 6的两张卡片”．

　甲、乙两队员进行乒乓球单打比赛，规定采用“七局四胜制”，用*X*表示需要比赛的局数，写出*X*所有可能的取值，并说明这些取值所表示的随机试验的结果．

[规范板书]　解　根据题意可知*X*的可能取值为4, 5, 6, 7.

*X*＝4表示共打了4局，甲、乙两人有1人连胜4局．

*X*＝5表示在前4局中有1人输了一局，最后一局此人胜出．

*X*＝6表示在前5局中有1人输了2局，最后一局此人胜出．

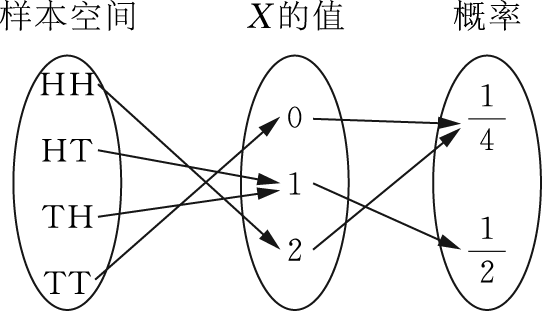
*X*＝7表示在前6局中，两人打平，最后一局有1人胜出.

例2　(教材P104例2)先后抛掷一枚质地均匀的硬币两次，设正面向上的次数为*X*，求随机变量*X*的概率分布．[5]

(见学生用书课堂本P64)

[处理建议]　分析*X*的所有可能取值及其对应的样本点．

[规范板书]　解　用H表示“正面向上”，T表示“反面向上”，可得下图[6]：



故随机变量*X*的概率分布如下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |
| *P* |  |  |  |

[题后反思]　(1) 求离散型随机变量分布列的基本步骤：

① 确定*X*的可能取值*xi*(*i*＝1,2,…，*n*)，以及取每个值表示的意义；

② 求出相应的概率*P*(*X*＝*xi*)＝*pi*(*i*＝1,2,…，*n*)；

③ 列成表格的形式．

(2) 写好分布列后，注意验证所有概率之和是否为1.

　抛一枚均匀的硬币3次，设正面朝上的次数为*X*.

(1) 说明*X*＝2表示的是什么事件，并求出*P*(*X*＝2)；

(2) 求*X*的分布列．

[规范板书]　解　(1) *X*＝2表示的事件是“恰有2次正面朝上”．

因为抛一枚均匀的硬币3次，总共有2×2×2＝8种不同的情况，其中恰有两次正面朝上的情况共有C＝3种，所以*P*(*X*＝2)＝.

(2) 根据题意，*X*的可能取值为0,1,2,3，由(1)中的方法可知*P*(*X*＝0)＝， *P*(*X*＝1)＝， *P*(*X*＝3)＝.

因此*X*的分布列如下表所示．

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *P* |  |  |  |  |

例3　(教材P105例3)从装有6个白球和4个红球的口袋中任取1个球，用*X*表示“取到的白球个数”，则*X*的取值为0或1，即*X*＝求随机变量*X*的概率分布．[7]

(见学生用书课堂本P64)

[规范板书]　解　由古典概型的知识，得

*P*(*X*＝0)＝＝，*P*(*X*＝1)＝＝.

故随机变量*X*的概率分布如下表所示．

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 |
| *P* |  |  |

[题后反思]　本例中，随机变量*X*只取两个可能值0和1.像这样的例子还有很多，例如：在射击中，只考虑“命中”与“不命中”；对产品进行检验时，只关心“合格”与“不合格”；等等．我们把这一类概率分布称为**0-1**分布或两点分布[8]，并记为*X*～0—1分布或*X*～两点分布．此处“～”表示“服从”．两点分布是一个重要的概率模型，一般地，两点分布如下表所示：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 |
| *P* | 1－*p* | *p* |

　袋中装有4个白球和3个红球，从中摸出2个球，记*X*＝求随机变量*X*的概率分布．

[规范板书]　解　由题意知*X*服从两点分布，*P*(*X*＝0)＝＝，所以*P*(*X*＝1)＝1－＝.故随机变量*X*的概率分布如下表所示．

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 |
| *P* |  |  |

[题后反思]　在两点分布中，只有两个对立的结果，知道一个结果的概率，便可以利用对立事件的概率和为1求出另一个结果的概率．

四、 课堂练习

1．下列叙述的量中，是离散型随机变量的为(C)

A. 将一枚均匀硬币掷五次，出现正面和反面向上的次数之和

B. 某人早晨在车站等出租车的时间

C. 连续不断地射击，首次命中目标所需要的次数

D. 袋中有2个黑球和6个红球，任取2个，取得一个红球的可能性

提示　选项A，掷硬币不是正面向上就是反面向上，次数之和为5，是常量；选项B，是随机变量，但不能一一列出，不是离散型随机变量；选项C，是随机变量，其取值为1, 2, 3, …，所以是离散型随机变量；选项D，事件发生的可能性不是随机变量．

2．袋中有大小相同的6个红球和5个白球，从袋中每次任意取出一个球(取出的球不放回)，直到取出的球是白球为止，所需要的取球次数为随机变量*X*，则*X*的可能取值为(B)

A. 1, 2, …， 6 B. 1, 2, …， 7

C. 1, 2, …， 11 D. 1, 2, 3, …

提示　可能第一次就取到白球，也可能把6个红球都取完后，才取得白球，故*X*的可能取值为1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

3．盒中放有大小相同的红色、绿色、黄色3种小球，已知红球个数是绿球个数的两倍，黄球个数是绿球个数的一半．现从该盒中随机取出1个球，若取出红球得1分，取出黄球得0分，取出绿球得－1分，试写出从该盒中取出1个球所得分数*ξ*的分布列．

解　设黄球的个数为*n*，则绿球的个数为2*n*，红球的个数为4*n*，盒中小球的总个数为7*n*.

所以*P*(*ξ*＝1)＝＝，*P*(*ξ*＝0)＝＝，*P*(*ξ*＝－1)＝＝.

故从该盒中取出1个球所得分数*ξ*的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *ξ* | 1 | 0 | －1 |
| *P* |  |  |  |

五、 课堂小结

1．随机变量、离散型随机变量等概念；离散型随机变量的概率分布及其性质.

2．求离散型随机变量的分布列的关键点：(1)确定随机变量的取值；(2)求每一个取值所对应的概率；(3)检验所有概率之和是否为1.

3．易错点：随机变量的取值不明确导致分布列求解错误.



[1] 随机变量的概念是俄国数学家切比雪夫在19世纪中叶建立和提倡使用的.

[2] 随机变量实质是一个从试验结果的集合(样本空间)到实数集合的映射，一旦给出了随机变量，即把每个结果都用一个数表示后，认识随机现象变成认识这个随机变量所有可能的取值和取每个值的概率．

[3] 概率分布实际上是建立了一个从随机变量的所有取值的集合到取值的概率的集合的映射．

[4] 巩固随机变量的概念，为后面解决离散型随机变量概率分布问题奠定基础．

[5] 初步体会求简单的概率分布．

[6] 通过此图，感受用函数思想研究概率问题．

[7] 进一步巩固求随机变量的概率分布．

[8] 一个所有可能结果只用两种的随机试验，通常称为伯努利试验(见“二项分布”一节)．如果将伯努利试验的结果分别看成“成功”与“不成功”，并设“成功”出现的概率为*p*，一次伯努利试验中“成功”出现的次数为*X*，则*X*服从两点分布，因此两点分布也常称为伯努利分布，两点分布中的*p*也常被称为成功概率．