圆锥曲线（2）

一、单选题

1. 已知过抛物线$y^2=4x$焦点F的直线与抛物线交于P，Q两点，M为线段PF的中点，连接OM，则ΔOMQ的最小面积为 (   )

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

2. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$，F为C的焦点，过焦点F且倾斜角为α的直线l与C交于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点，则下列结论不正确的是 (   )

A. $x_1x_2+y_1y_2=-\frac{3}{4}p^2$

B. $|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$

C. $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$

D. 记原点为O，则$S_{\Delta AOB}=\frac{p^2}{\sin\alpha}$

二、多选题

3. 设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$是抛物线$y^2=4x$上两点，O是坐标原点，若$OA\perp OB$，下列结论正确的为 (   )

A. y_1y_2为定值

B. 直线AB过抛物线$y^2=4x$的焦点

C. $S_{\Delta AOB}$最小值为16

D. O到直线AB的距离最大值为4

4. 设抛物线$y=ax^2(a>0)$的准线与对称轴交于点P，过点P作抛物线的两条切线，切点分别为A和B，则 (   )

A. 点P的坐标为$(0,-\frac{1}{4a})$

B. 直线AB的方程为$y=-\frac{1}{4a}$

C. $PA\perp PB$

D. $|AB|=\frac{1}{2a}$

三、填空题

5. 点$M(3,2)$到抛物线C：$y=ax^2(a>0)$准线的距离为4，则实数$a=$______________.

6. 若直线$y=kx-1$与双曲线$x^2-y^2=4$只有一个公共点，则k的值是_____________.

四、解答题

7. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，A为C上一点，B为准线l上一点，$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FA}$，$|AB|=9$.

(1)求C的方程：

(2)M，N，$E(x_0,-2)$是C上的三点，若$k_{EM}+k_{EN}=-\frac{4}{3}$，求点$E$到直线$MN$距离的最大值.

8. 已知平面直角坐标系xOy中有一抛物线$y^2 = x$.

(1)过点O作抛物线的两条互相垂直的弦OM和ON，设M的纵坐标为m，试用m表示$\triangle OMN$的面积，并求$\triangle OMN$面积的最小值；

(2)过抛物线上一点$A(9,3)$作圆$(x-2)^2 + y^2 = 1$的两条切线AB、AC，分别交抛物线于点B、C，求直线BC的斜率.

9. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$的左顶点为$A(-2,0)$，焦距为$2\sqrt{3}$.动圆$D$的圆心坐标是$(0,2)$，过点$A$作圆$D$的两条切线分别交椭圆于$M$和$N$两点，记直线$AM$、$AN$的斜率分别为$k_1$和$k_2$.

(1)求证：$k_1k_2 = 1$;

(2)若O为坐标原点，作$OP \perp MN$，垂足为P.是否存在定点Q，使得$|PQ|$为定值?

答案和解析

1.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查了抛物线的焦点弦问题以及利用基本不等式求最值，属于中档题.

设直线PQ，联立直线与抛物线方程，表示出ΔOMQ的面积，利用基本不等式求最值.

【解答】

解：由题意可知，抛物线$y^2=4x$焦点$F(1,0)$

设直线PQ：$x=my+1$，代入抛物线方程可得$y^2-4my-4=0$，

设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

则$y_1y_2=-4$，不妨令$y_1>0$，$y_2=\frac{-4}{y_1}$,

$\because M$为线段PF的中点，则$y_M=\frac{y_1}{2}$,

故ΔOMQ的面积为$S=\frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{y_1}{2}-y_2\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{y_1}{2}+\frac{4}{y_1}\right)\geq\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$,

当且仅当$y_1=2\sqrt{2}$时，等号成立，

故ΔOMQ的最小面积为$\sqrt{2}$，

故选 B.

2.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查了直线和抛物线的应用，属较综合的中档题.

根据抛物线定义逐项判段即可.

【解答】

解：设l的方程为$ty=x-\frac{p}{2}$,

与抛物线方程联立得$y^2-2pty-p^2=0$，

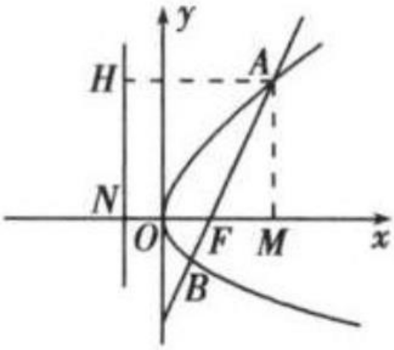
所以$y_1y_2=-p^2$，所以$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$,

所以$x_1x_2+y_1y_2=-\frac{3}{4}p^2$，所以$A$中结论正确;

如图，抛物线的准线与x轴交于点N，过A作AM垂直x轴于点M，过A作AH垂直准线于点H，

由抛物线的定义可得$|AF|=|AH|=|MN|=|NF|+|FM|=p+|AF|\cos\alpha$，

所以$|AF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，同理可得$|BF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}$.



所以$|AB|=|AF|+|BF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}+\frac{p}{1+\cos\alpha}=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$，所以$B$中结论正确;

$$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{\frac{p}{1-\cos\alpha}}+\frac{1}{\frac{p}{1+\cos\alpha}}$$

$=\frac{1-\cos\alpha}{p}+\frac{1+\cos\alpha}{p}=\frac{2}{p}$，所以$C$中结论正确;

因为$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OF|(|AF|\sin\alpha+|BF|\cdot\sin\alpha)$

$=\frac{p}{4}(|AF|+|BF|)\sin\alpha=\frac{p}{4}|AB|\sin\alpha=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$，所以$D$中结论错误，

故选 D.

3.【答案】ACD

【解析】【分析】

本题考查抛物线的几何性质以及直线与抛物线的位置关系，属于较难题.

设直线AB方程为$x=my+n(n\neq0)$，与抛物线方程联立，由$k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$求得n，再由三角形面积公式以及点到直线的距离公式求解.

【解答】

解：设直线AB方程为$x=my+n(n\neq0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

将直线AB方程代入抛物线方程$y^2=4x$，焦点坐标$(1,0)$，得$y^2-4my-4n=0$，

则$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4n$，

$$\therefore x_1x_2=(my_1+n)(my_2+n)$$

$$=m^2y_1y_2+mn(y_1+y_2)+n^2$$

$=-4m^2n+4m^2n+n^2=n^2$.

$\because OA \perp OB$，

$\therefore k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{-4n}{n^2} = -1$，解得$n = 4$.

故$y_1 y_2 = -16$，为定值，故 A 正确;

直线AB方程为$x = my + 4$，该直线过定点$(4,0)$，焦点坐标不满足直线方程，所以B不正确;

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OA||OB| = \frac{1}{2} \times \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{y_1^4}{16} + y_1^2} \cdot \sqrt{\frac{y_2^4}{16} + y_2^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times |y_1 y_2| \times \frac{1}{16} \times \sqrt{(y_1^2 + 16)(y_2^2 + 16)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{(y_1^2 + 16)(y_2^2 + 16)}$$

$\geq \frac{1}{2} \times \sqrt{2\sqrt{16|y_1|^2} \cdot 2\sqrt{16|y_2|^2}} = 16$.

当且仅当$|y_1| = |y_2| = 4$时，取等号，所以 C 正确;

O到直线AB的距离$d = \frac{4}{\sqrt{1+m^2}} \leq 4$，

当$m = 0$时，d取得最大值4，即 D 正确.

4.【答案】AC

【解析】【分析】

本题主要考查直线与抛物线的综合应用，需要学生熟练掌握公式，属于中档题.

对于A，将原抛物线方程化为标准方程，可求得解抛物线的准线方程，即可求得点P的坐标，对于B，设切线方程为$y = kx - \frac{1}{4a}\,(k \neq 0)$，联立切线方程与抛物线方程$\begin{cases} y = kx - \frac{1}{4a} \\ y = ax^2 \end{cases}$，化简整理可得，$ax^2 - kx + \frac{1}{4a} = 0$，再结合$\Delta = 0$，即可求解，对于$C$，结合向量数量积与向量垂直关系，即可求解；对于$D$，结合两点之间的距离公式，即可求解.

【解答】

解：由$y = ax^2$得，$x^2 = \frac{1}{a}y$，则焦点为$F(0, \frac{1}{4a})$，准线方程为$y = -\frac{1}{4a}$，$\therefore P(0, -\frac{1}{4a})$，$A$ 正确;

设切线方程为$y = kx - \frac{1}{4a}(k \neq 0)$，

由$\begin{cases} y = ax^2, \\ y = kx - \frac{1}{4a}, \end{cases}$得$ax^2 - kx + \frac{1}{4a} = 0$，

令$\varDelta = k^2 - 4 \times a \times \frac{1}{4a} = 0$，解得$k = \pm 1$.

解方程$ax^2 \pm x + \frac{1}{4a} = 0$可得$x = \pm \frac{1}{2a}$，则$y = \frac{1}{4a}$，

即两切点坐标为$\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{4a}\right)$，$\left(-\frac{1}{2a}, \frac{1}{4a}\right)$，

因此直线AB的方程为$y = \frac{1}{4a}$，B错误;

又$\overrightarrow{PA} = (\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a})$，$\overrightarrow{PB} = (-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a})$，

$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = 0$，

$\therefore \overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$，即$PA \perp PB$，$C$正确;

$|AB| = |\frac{1}{2a} - (-\frac{1}{2a})| = \frac{1}{a}$，$D$错误.

5.【答案】$\frac{1}{8}$

【解析】【分析】

本题考查抛物线的标准方程和几何性质，属容易题.

解答时必须注意把抛物线的方程变成标准形式，根据点$M(3,2)$到准线的距离为4，得到$2 + \frac{1}{4a} = 4$，解方程即可.

【解答】

解：抛物线$y = ax^2$的标准方程为$x^2 = \frac{1}{a}y$，

因为$a > 0$，所以准线方程为$y = -\frac{1}{4a}$，

因为点$M(3,2)$到抛物线C准线的距离为4，

所以$2 + \frac{1}{4a} = 4$，解得$a = \frac{1}{8}$.

故答案为：$\frac{1}{8}$.

6.【答案】-1或1或$-\frac{\sqrt{5}}{2}$或$\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】【分析】

本题考查直线与双曲线的位置关系.

先将直线方程与双曲线方程联立，可得$(1 - k^2)x^2 + 2kx - 5 = 0$，结合直线与双曲线只有一个公共点，再分$1 - k^2 = 0$和$1 - k^2 \neq 0$讨论即可.

【解答】

解：由$\begin{cases}x^2-y^2=4\\y=kx-1\end{cases}$，消去$y$，得$(1-k^2)x^2+2kx-5=0$.

当$1-k^2=0$，即$k=\pm1$时，显然符合题意;

当$1-k^2\neq0$时，则由$\varDelta=20-16k^2=0$，

解得$k=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，故$k=\pm1$或$\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

故答案为-1或1或$-\frac{\sqrt{5}}{2}$或$\frac{\sqrt{5}}{2}$.

7.【答案】解：(1)过A做准线l的垂线，交l于点A_1，准线l交x轴于点F_1，

由抛物线的定义可知，$|AA_1|=|AF|=\frac{1}{3}|AB|=3$，

由$\triangle BFF_1\backsim\triangle BAA_1$，$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FA}$，可得$\frac{|BF|}{|BA|}=\frac{|FF_1|}{|AA_1|}=\frac{2}{3}$，

所以F到准线l的距离$p=|FF_1|=2$，

则C的方程为$y^2=4x$.

(2)$E(x_0,-2)$在抛物线C上，所以$x_0=1$，

设直线MN的方程为$x=ty+n$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

将$x=ty+n$代入$y^2=4x$，得$y^2-4ty-4n=0$.

则$y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4n$.

$k_{EM}=\frac{y_1+2}{x_1-1}=\frac{y_1+2}{\frac{{y_1}^2}{4}-1}=\frac{4}{y_1-2}$，同理$k_{EN}=\frac{4}{y_2-2}$.

$k_{EM}+k_{EN}=\frac{4}{y_1-2}+\frac{4}{y_2-2}=\frac{4(y_1+y_2)-16}{y_1y_2-2(y_1+y_2)+4}=\frac{16t-16}{-4n-8t+4}=-\frac{4}{3}$，

整理得，$n=t-2$，

直线MN的方程为$x=ty+t-2$，所以直线MN过**定点**$T(-2,-1)$.

当$ET\perp MN$时，点E到直线MN距离最大，且最大距离为$|ET|=\sqrt{10}$.

【解析】本题考查求抛物线得方程及直线与抛物线的位置关系，属于中档题.

(1)过A做准线l的垂线，交l于点A_1，准线l交x轴于点F_1，结合抛物线的定义以及相似三角形即可求解;

(2)设直线MN的方程为$x=ty+n$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,代入$y^2=4x$,得$k_{EM}+k_{EN}=-\frac{4}{3}$,继而可得$MN$过定点$T(-2,-1)$，所以当$ET\perp MN$时，点$E$到直线$MN$距离最大，即可求解.

8.【答案】解：(Ⅰ)由已知可设$M({y_1}^2,y_1)$，$N(y_2^2,y_2)$，

$\because OM\perp ON$，$\therefore y_1^2y_2^2+y_1y_2=0$，得$y_1y_2=-1$，

$\because y_1=m$，$\therefore y_2=-\frac{1}{m}$，得$M(m^2,m)$，$N(\frac{1}{m^2},-\frac{1}{m})$

$\therefore |OM|=\sqrt{m^4+m^2}$，$|ON|=\sqrt{\frac{1}{m^4}+\frac{1}{m^2}}=\sqrt{\frac{m^2+1}{m^4}}$，

$\therefore S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|OM|\cdot|ON|=\frac{1}{2}\sqrt{m^4+m^2}\cdot\sqrt{\frac{m^2+1}{m^4}}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}+2}\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{2+2}=1$，

当且仅当$m^2=\frac{1}{m^2}$，即$m=\pm1$时取等号，故$\triangle OMN$面积的最小值为1；

(Ⅱ)由题意可知显然AB、AC斜率均存在且不为0，

设$B(y_3^2,y_3)$，$C(y_4^2,y_4)$，$l_{AB}:y-3=k_1(x-9)$，$l_{AC}:y-3=k_2(x-9)$，

$\because AB$，AC均与该圆相切，

$\therefore \frac{|7k_1-3|}{\sqrt{k_1^2+1}}=\frac{|7k_2-3|}{\sqrt{k_2^2+1}}=1$，化简得：$24k_1^2-21k_1+4=0$和$24k_2^2-21k_2+4=0$，

$\therefore k_1$，k_2是方程$24k^2-21k+4=0$的两根，$\therefore k_1+k_2=\frac{21}{24}$，$k_1k_2=\frac{1}{6}$，

联立l_{AB}与抛物线可得：

$\begin{cases}y^2=x\\y-3=k_1(x-9)\end{cases}$，得$y-3=k_1(y^2-9)$，$\therefore k_1(y_3+3)=1$，$y_3=\frac{1}{k_1}-3$，

同理$k_2(y_4+3)=1$，$y_4=\frac{1}{k_2}-3$

$\therefore k_{BC}=\frac{y_4-y_3}{y_4^2-y_3^2}=\frac{1}{y_4+y_3}=\frac{1}{\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}-6}=\frac{1}{6\times\frac{21}{24}-6}=-\frac{4}{3}$.

【解析】本题考查抛物线中的面积问题，直线与抛物线的综合问题，属于综合题.

9.【答案】解：(1)由题意可得：$\begin{cases}a=2\\2c=2\sqrt{3}\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得：$a^2=4$，$b^2=1$，故椭圆方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

设过点A与圆D的切线的直线为$y=k(x+2)$，动圆的半径为r，则$\frac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=r$，

化简，得$(4-r^2)k^2-8k+4-r^2=0$

所以k_1，k_2是方程$(4-r^2)k^2-8k+4-r^2=0$的两根，由韦达定理知，$k_1k_2=1$.

(2)设点$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，将$y=k(x+2)$代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

消去y得$(1+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$，

则$(-2)x_1=\frac{16k^2-4}{4k^2+1}$得$x_1=\frac{2-8k^2}{4k^2+1}$，$y_1=\frac{4k}{4k^2+1}$.

所以$M(\frac{2-8k^2}{4k^2+1},\frac{4k}{4k^2+1})$

因为$k_1k_2=1$，所以将k换成$\frac{1}{k}$得$N(\frac{2k^2-8}{k^2+4},\frac{4k}{k^2+4})$

则直线MN的斜率$k=\frac{\frac{4k}{4k^2+1}-\frac{4k}{k^2+4}}{\frac{2-8k^2}{4k^2+1}-\frac{2k^2-8}{k^2+4}}=\frac{3k}{4(k^2+1)}$

所以直线MN的方程为$y-\frac{4k}{4k^2+1}=\frac{3k}{4(k^2+1)}(x-\frac{2-8k^2}{4k^2+1})$

由椭圆的对称性可知，直线MN必过轴上一定点$(x_0,0)$，

所以$0-\frac{4k}{4k^2+1}=\frac{3k}{4(k^2+1)}(x_0-\frac{2-8k^2}{4k^2+1})$，化简得$(40+12x_0)k^2+3x_0+10=0$

这是一个与k无关的方程，所以$x_0=-\frac{10}{3}$，即直线MN过定点$B(-\frac{10}{3},0)$.

因为$OP\perp MN$，所以点P的轨迹是以OE为直径的圆上的一段弧，

故存在点$Q(-\frac{5}{3},0)$，使得$|PQ|$为定值.

方法二

设点$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.直线MN的方程为$y=mx+n$，代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

消去y得$(1+4m^2)x^2+8mnx+4n^2-4=0$，

所以$x_1+x_2=-\frac{8mn}{4m^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4n^2-4}{4m^2+1}(*)$

因为$k_1k_2=1$，所以$\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=1$，即$\frac{(mx_1+n)}{(x_1+2)}\cdot\frac{(mx_2+n)}{(x_2+2)}=1$，

化简得$(m^2-1)x_1x_2+(mn-2)(x_1+x_2)+n^2-4=0$，将$(*)$代入并化简得

$20m^2-16mn+3n^2=0$，解得$n=2m$或$n=\frac{10}{3}m$

当$n=2m$时，直线MN方程为$y=mx+2m$，过点A，不合题意，舍去；

当$n=\frac{10}{3}m$时，直线MN方程为$y=mx+\frac{10}{3}n$，过定点$B(-\frac{10}{3},0)$.

因为$OP\perp MN$，所以点P的轨迹是以OB为直径的圆上的一段弧，

故存在点$Q(-\frac{5}{3},0)$，使得$|PQ|$为定值.

【解析】本题考查直线与椭圆的位置关系，考查椭圆中定点有关的问题，为较难题.