高二数学复习小练 2

一、单选题

1.直线 $y=kx+1$，当 k 变化时，此直线被椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 截得的弦长的最大值是(　　)

A．2　　　　B．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　　　C．4　　　　D．不能确定

2.若直线 $y=kx+1$ 与椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$ 总有公共点，则 m 的取值范围是(　　)

A．$m>1$　　　　B．$m>0$

C．$0<m<5$ 且 $m\neq1$　　　　D．$m\geq1$ 且 $m\neq5$

3.点 A，B 分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点，$F$ 为右焦点，C 为短轴上不同于原点 O 的一点，D 为 OC 的中点，直线 AD 与 BC 交于点 M，且 $MF\perp AB$，则该椭圆的离心率为(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{1}{3}$　　　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、多选题

4.已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，焦距为$2\sqrt{5}$，离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，$P$ 为椭圆左半边上一点，连接PF_2交 y 轴于点 N，$PF_2\perp PF_1$，其中 O 为坐标原点，则下列说法正确的是(　　)

A. 椭圆的长轴长为 3

B. $|F_1F_2|=4|ON|$

C. 若点 Q 在椭圆 C 上，则$|QF_1|$的最大值为$3+\sqrt{5}$

D. 点 P 到 x 轴的距离为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

5.已知椭圆$C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的左、右焦点分别是$F_1, F_2$，左、右顶点分别是~$A_1, A_2$，点~$P$是椭圆~$C$上异于~$A_1, A_2$的任意一点，则下列说法正确的是(　　)

A. ~$|PF_1|+|PF_2|=4$

B. 存在点~P满足$\angle F_1PF_2=90^\circ$

C. 直线~PA_1与直线PA_2的斜率之积为~$-\frac{9}{16}$

D. 若$\triangle F_1PF_2$的面积为$2\sqrt{7}$，则点~P的横坐标为$\pm\frac{4}{3}\sqrt{5}$

6.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，短轴长为$2\sqrt{3}$，$P$ 为 C 上任意一点，F_1、F_2分别为 C 的左、右焦点，则下列说法正确的是(　　)

A. 存在点 P，使得 PF_1 的长度为 $\frac{1}{2}$

B. $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$

C. C 上存在 4 个不同的点 P，使得 $\triangle PF_1F_2$ 是直角三角形

D. $\triangle PF_1F_2$ 内切圆半径的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

三、填空题

7.已知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$是椭圆 C 的两个焦点，过 F_2 且垂直于 x 轴的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点，且$|AB|=3$，则椭圆 C 的方程为_____________.

8.已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一条弦所在的直线方程是 $x-y+5=0$，弦的中点坐标是 $M(-4,1)$，则椭圆的离心率是_____________.

9.已知直线 l 与椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 在第一象限交于 A，B 两点，l 与 x 轴、y 轴分别交于 M，N 两点，且$|MA|=|NB|$，$|MN|=2\sqrt{3}$，则 l 的方程为_____________.

四、解答题

10.已知椭圆 C 的两个焦点分别为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，短轴的两个端点分别为 B_1，B_2.

(1)若$\triangle F_1B_1B_2$为等边三角形，求椭圆 C 的方程；

(2)若椭圆 C 的短轴长为 2，过点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 相交于 P，Q 两点，且$\overrightarrow{F_1P}\perp\overrightarrow{F_1Q}$，求直线 l 的方程.

11.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $A(2,1)$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 若 P，Q 是椭圆 C 上的两个动点，且使 $\angle PAQ$ 的角平分线总垂直于 x 轴，试判断直线 PQ 的斜率是否为定值？若是，求出该值；若不是，说明理由.

12.椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，短轴的一个端点到右焦点的距离为$\sqrt{3}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设斜率存在的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，坐标原点 O 到直线 l 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，求△AOB 面积的最大值.

巩固练习：

1.若直线 $mx+ny=4$ 与⊙O：$x^2+y^2=4$ 没有交点，则过点 $P(m，n)$的直线与椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的交点个数是(　　)

A．至多为 1　　B．2　　C．1　　D．0

2.已知椭圆：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<2)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线 l 交椭圆于 A，B 两点，若$|BF_2|+|AF_2|$的最大值为 5，则 b 的值是(　　)

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C.$\frac{3}{2}$　　D．$\sqrt{3}$

3.已知椭圆 M：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，若 P 在椭圆 M 上，F_1，F_2 是椭圆 M 的左，右焦点，则下列说法正确的有(　　)

A. 若$|PF_1|=|PF_2|$，则$\angle PF_1F_2=30^\circ$　　B. $\triangle F_1PF_2$面积的最大值为$\sqrt{3}$

C. $|PF_1|-|PF_2|$的最大值为$2\sqrt{3}$　　D. 满足$\triangle F_1PF_2$是直角三角形的点 P 有 4 个

4.已知 F 为椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$的左焦点，直线$l:y=kx(k\neq 0)$与椭圆 C 交于 A、B 两点，$AE\perp x$ 轴，垂足为 E，BE 与椭圆 C 的另一个交点为 P，则(　　)

A. $\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}$的最小值为 2　　B. $\triangle ABE$ 的面积的最大值为$\sqrt{2}$

C. 直线 BE 的斜率为$\frac{k}{2}$　　D. $\angle PAB$ 为直角

5.平行四边形 $ABCD$ 内接于椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，直线 AB 的斜率 $k_1=2$，则直线 AD 的斜率 k_2 为____________.

6.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$，若直线 l 经过 $M(0,1)$，与椭圆交于 A，B 两点，且$\overrightarrow{MA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$，则直线 l 的方程为______________.

7.已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A\left(0,-2\right),B\left(\frac{3}{2},-1\right)$两点.

(1)求 E 的方程；

(2)设过点 $P\left(1,-2\right)$的直线交 E 于 M，N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$．证明：直线 HN 过定点.

8. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，上顶点为 B，离心率为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，且$|BF|=\sqrt{5}$.

(1)求椭圆的方程；

(2)直线 l 与椭圆有唯一的公共点 M，与 y 轴的正半轴交于点 N，过 N 与 BF 垂直的直线交 x 轴于点 P.若 $MP\parallel BF$，求直线 l 的方程.

答案和解析

一、单选题

1.答案　B 解析　直线恒过定点(0,1)，且点(0,1)在椭圆上，可设另外一个交点为(x，y)，则$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，即 $x^2=4-4y^2$，则弦长为$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{4-4y^2+y^2-2y+1}=\sqrt{-3y^2-2y+5}$，因为$-1\le y\le 1$，所以当 $y=-\frac{1}{3}$时，弦长取得最大值$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

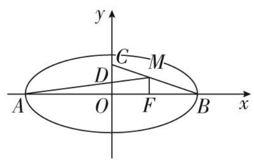
2.答案　D 解析　解法一：由于直线 $y=kx+1$ 恒过点(0,1)，所以点(0,1)必在椭圆内或椭圆上，则 $0<\frac{1}{m}\le 1$ 且 $m\ne 5$，故 $m\ge 1$ 且 $m\ne 5$.

解法二：由$\begin{cases}y=kx+1,\\ mx^2+5y^2-5m=0,\end{cases}$消去 y 整理得$(5k^2+m)x^2+10kx+5(1-m)=0$.由题意知$\Delta=100k^2-20(1-m)\cdot(5k^2+m)\ge 0$ 对一切 $k\in\mathbf{R}$ 恒成立，即 $5mk^2+m^2-m\ge 0$ 对一切 $k\in\mathbf{R}$ 恒成立．由于 $m>0$ 且 $m\ne 5$，所以 $0-20m(m^2-m)\le 0$ 且 $m\ne 5$，得 $m\ge 1$ 且 $m\ne 5$.

3.答案　B 解析　由题意作出椭圆如图，$\because MF\perp AB$，且 $OC\perp AB$，$\therefore MF/\!/OC$，$MF/\!/OD$，

$\therefore\frac{|OD|}{|MF|}=\frac{|OA|}{|AF|}=\frac{a}{a+c}$，①

$\frac{|MF|}{|OC|}=\frac{|FB|}{|OB|}=\frac{a-c}{a}$，　②

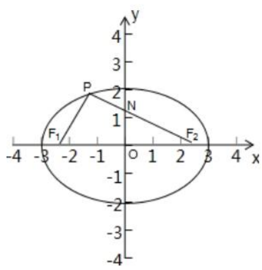


①×②，得到$\frac{|OD|}{|MF|}\cdot\frac{|MF|}{|OC|}=\frac{a}{a+c}\cdot\frac{a-c}{a}$，即$\frac{|OD|}{|OC|}=\frac{a-c}{a+c}$，又$\frac{|OD|}{|OC|}=\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{a-c}{a+c}=\frac{1}{2}$，

$\therefore 2(a-c)=a+c$，$\therefore a=3c$，$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$.故选 B.

二、多选题

4.【答案】BCD 解：如图



对于选项 A，由题意 $2c=2\sqrt{5}$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 可得 $c=\sqrt{5}$，$a=3$，$b=2$，

$2a=6$，选项 A 错误;

对于选项 B，由 $PF_2\perp PF_1$，即 $\angle F_1PF_2=90^\circ$ 可得 $\triangle F_2ON\backsim\triangle F_2PF_1$，则

$\frac{|OF_2|}{|PF_2|}=\frac{|ON|}{|PF_1|}$

又因为$|PF_2|+|PF_1|=6$，$|PF_1|^2+|PF_2|^2=20,$ 所以$|PF_1|=2$，$|PF_2|=4$

$|ON|=\frac{1}{2}|OF_2|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$|F_1F_2|=2\sqrt{5}=4|ON|$，选项 B 正确;

对于 C 选项，因为 Q 在椭圆 C 上，则$|QF_1|_{\max}=a+c=3+\sqrt{5}$，故 C 选项正确;

对于 D 选项，设 P 在 x 轴上的投影为 G，则 $\triangle PF_1G\backsim\triangle F_2PG$，则$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1G|}{|PG|}=\frac{1}{2}$，所以$|PG|=2|F_1G|$，

又$|F_1G|^2+|PG|^2=|PF_1|^2=4$，解得$|PG|=2|F_1G|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，则 P 到 x 轴的距离为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$，故 D 选项正确;

故选 BCD

5.【答案】CD【解答】

解：选项 A：因为 $a=4$，所以 $|PF_1|+|PF_2|=2a=8$，故 A 错误；

选项 B：当 P 为椭圆上短轴端点时，$\angle F_1PF_2$ 最大，

因为 $a=4,b=3,c=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$，$c<b$，所以 $\angle F_1PO<45^\circ$，$\angle F_1PF_2<90^\circ$，

所以椭圆上不存在点 P 满足 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，故 B 错误；

选项 C：由已知 $A_1(-4,0)$，$A_2(4,0)$，设 $P(x,y)$，

则 $k_{PA_1}=\dfrac{y}{x+4},k_{PA_2}=\dfrac{y}{x-4}$，

所以 $k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\dfrac{y^2}{x^2-16}=\dfrac{9(1-\frac{x^2}{16})}{x^2-16}=-\dfrac{9}{16}$，故 C 正确；

选项 D：若 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $2\sqrt{7}$，因为 $|F_1F_2|=2\sqrt{7}$，

所以 P 的纵坐标为 ±2，代入椭圆方程得点 P 的横坐标为 $\pm\dfrac{4}{3}\sqrt{5}$，故 D 正确.

故选 CD.

6.【答案】BCD【解答】

解：由题意得，解得 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\\2b=2\sqrt{3}\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\b=\sqrt{3}\\c=1\end{cases}$，则椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，

选项 A：P 为 C 上任意一点，则 $1\leqslant|PF_1|\leqslant3$，故不正确，

选项 B：$\triangle PF_1F_2$ 面积为 $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times2c|y|=c|y|$，

当点 P 落在短轴端点时，$\triangle PF_1F_2$ 面积最大为 $\sqrt{3}$，故正确；

选项 C：点 P 在椭圆上，则 $|PF_1|+|PF_2|=4$，$|F_1F_2|=2$，

所以 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\dfrac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-|F_1F_2|^2-2|PF_1||PF_2|}{2|PF_1||PF_2|}$

$=\dfrac{16-4-2|PF_1||PF_2|}{2|PF_1||PF_2|}=\dfrac{6}{|PF_1||PF_2|}-1$，

因为 $|PF_1||PF_2|\leqslant\left(\dfrac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=4$，当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|$ 时等号成立，

所以 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{6}{|PF_1||PF_2|}-1\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $\angle F_1PF_2$ 最大为 $\frac{\pi}{3}$.

故不存在点 P，使 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$.

当 PF_2 或 PF_1 垂直于 x 轴时，有四个不同的直角三角形，故正确；

选项 D：设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 r，

$\triangle PF_1F_2$ 的面积 $=\frac{1}{2}\left(|F_1F_2|+|PF_1|+|PF_2|\right)\times r=\left(a+c\right)\times r=3r$，

若 r 最大，需 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大，

选项 B 可知，当点 P 落在短轴端点时，$\triangle PF_1F_2$ 面积最大，为 $\sqrt{3}$，

解得此时 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故正确，

故选：BCD.

三、填空题

7.解析　设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则 $c=1$.因为过 F_2 且垂直于 x 轴的直线与椭圆交于 A，B 两点，且 $|AB|=3$，所以 $\frac{b^2}{a}=\frac{3}{2}$，又 $b^2=a^2-c^2$，所以 $a^2=4$，$b^2=a^2-c^2=4-1=3$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

8.解析　解法一：设直线与椭圆的交点为 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，分别代入椭圆方程，得

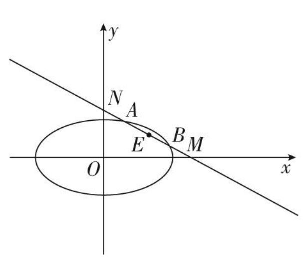
$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式相减，得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$.因为 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，且 $x_1+x_2=-8$，$y_1+y_2=2$，

所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解法二：将直线方程 $x-y+5=0$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，得 $(a^2+b^2)x^2+10a^2x+25a^2-a^2b^2=0$，设直线与椭圆的交点为 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{10a^2}{a^2+b^2}$，又由中点坐标公式知 $x_1+x_2=-8$，所以 $\frac{10a^2}{a^2+b^2}=8$，解得 $a=2b$，所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}b$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9.答案　$x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$

解析　令 AB 的中点为 E，因为 $|MA|=|NB|$，所以 $|ME|=|NE|$，设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{3}=1$，所以 $\frac{x_1^2}{6}-\frac{x_2^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}-\frac{y_2^2}{3}=0$，即 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{6}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3}=0$，所以 $\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=-\frac{1}{2}$，即 $k_{OE}\cdot k_{AB}=-\frac{1}{2}$，设直线 AB：$y=kx+m$，$k<0$，$m>0$，令 $x=0$ 得 $y=m$，令 $y=0$ 得 $x=-\frac{m}{k}$，即 $M\left(-\frac{m}{k}，0\right)$，$N(0$，



m)，所以 $E\left(-\frac{m}{2k},\ \frac{m}{2}\right)$，所以 $k\cdot\frac{\frac{m}{2}}{-\frac{m}{2k}}=-\frac{1}{2}$，解得 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$或 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$(舍去)，又$|MN|=2\sqrt{3}$，即$|MN|=\sqrt{(\sqrt{2}m)^2+m^2}$
$=2\sqrt{3}$，解得 $m=2$ 或 $m=-2$(舍去)，所以直线 AB：$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$，即 $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$.

四、解答题

10.解 (1)由$\triangle F_1B_1B_2$为等边三角形，

结合题意知$\begin{cases}a=2b,\\a^2-b^2=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a^2=\frac{4}{3},\\b^2=\frac{1}{3},\end{cases}$

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{\frac{4}{3}}+\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$.

(2)由 $2b=2$，$c=1$ 得 $b=1$，$a^2=b^2+c^2=2$，

易知椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

当直线 l 的斜率不存在时，其方程为 $x=1$，不符合题意；

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\\frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 得$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2(k^2-1)=0$，

$\Delta=8(k^2+1)>0$，

设 $P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2(k^2-1)}{2k^2+1}$，

$\overrightarrow{F_1P}=(x_1+1，y_1)$，$\overrightarrow{F_1Q}=(x_2+1，y_2)$，

因为$\overrightarrow{F_1P}\perp\overrightarrow{F_1Q}$，所以$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1Q}=0$，

即$(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=x_1x_2+(x_1+x_2)+1+k^2(x_1-1)(x_2-1)=(k^2+1)x_1x_2-(k^2-1)(x_1+x_2)+k^2+1=$
$\frac{7k^2-1}{2k^2+1}=0$，

解得 $k^2=\frac{1}{7}$，即 $k=\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$,

故直线 l 的方程为 $x+\sqrt{7}y-1=0$ 或 $x-\sqrt{7}y-1=0$.

11.【详解】(Ⅰ) 因为椭圆C的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点$A(2,1)$，

所以$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为$a^2=b^2+c^2$，

解得$a^2=8$，$b^2=2$，

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

(Ⅱ)法 1：因为$\angle PAQ$的角平分线总垂直于x轴,

所以PA与AQ所在直线关于直线$x=2$对称.

设直线PA的斜率为k，则直线AQ的斜率为$-k$.

所以直线PA的方程为$y-1=k\left(x-2\right)$,

直线AQ的方程为$y-1=-k\left(x-2\right)$.

设点$P\left(x_P,y_P\right)$，$Q\left(x_Q,y_Q\right)$,由$\begin{cases} y-1=k\left(x-2\right), \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1, \end{cases}$ 消去y,

得$\left(1+4k^2\right)x^2-\left(16k^2-8k\right)x+16k^2-16k-4=0$. ①

因为点$A\left(2,1\right)$在椭圆C上，所以$x=2$是方程①的一个根,

则$2x_P=\dfrac{16k^2-16k-4}{1+4k^2}$，所以$x_P=\dfrac{8k^2-8k-2}{1+4k^2}$.

同理$x_Q=\dfrac{8k^2+8k-2}{1+4k^2}$.所以$x_P-x_Q=-\dfrac{16k}{1+4k^2}$.

又$y_P-y_Q=k\left(x_P+x_Q-4\right)=-\dfrac{8k}{1+4k^2}$.

所以直线PQ的斜率为$k_{PQ}=\dfrac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\dfrac{1}{2}$.

所以直线PQ的斜率为定值，该值为$\dfrac{1}{2}$.

法 2：设点$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$,

则直线PA的斜率$k_{PA}=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}$，直线$QA$的斜率$k_{QA}=\dfrac{y_2-1}{x_2-2}$.

因为$\angle PAQ$的角平分线总垂直于x轴，所以PA与AQ所在直线关于直线$x=2$对称.

所以$k_{PA}=-k_{QA}$，即$\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=0$， ①

因为点$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$在椭圆$C$上,

所以$\frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{2}=1$，② $\frac{x_2^2}{8}+\frac{y_2^2}{2}=1$. ③

由②得$\left(x_1^2-4\right)+4\left(y_1^2-1\right)=0$，得$\frac{y_1-1}{x_1-2}=-\frac{x_1+2}{4\left(y_1+1\right)}$，④

同理由③得$\frac{y_2-1}{x_2-2}=-\frac{x_2+2}{4\left(y_2+1\right)}$，⑤

由①④⑤得$\frac{x_1+2}{4\left(y_1+1\right)}+\frac{x_2+2}{4\left(y_2+1\right)}=0$，

化简得$x_1y_2+x_2y_1+\left(x_1+x_2\right)+2\left(y_1+y_2\right)+4=0$，⑥

由①得$x_1y_2+x_2y_1-\left(x_1+x_2\right)-2\left(y_1+y_2\right)+4=0$，⑦

⑥－⑦得$x_1+x_2=-2\left(y_1+y_2\right)$.

②－③得$\frac{x_1^2-x_2^2}{8}+\frac{y_1^2-y_2^2}{2}=0$，得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{4\left(y_1+y_2\right)}=\frac{1}{2}$.

所以直线PQ的斜率为$k_{PQ}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{2}$为定值.

法 3：设直线PQ的方程为$y=kx+b$，点$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，

则$y_1=kx_1+b,y_2=kx_2+b$，

直线PA的斜率$k_{PA}=\frac{y_1-1}{x_1-2}$，直线$QA$的斜率$k_{QA}=\frac{y_2-1}{x_2-2}$.

因为$\angle PAQ$的角平分线总垂直于x轴,

所以PA与AQ所在直线关于直线$x=2$对称.

所以$k_{PA}=-k_{QA}$，即$\frac{y_1-1}{x_1-2}=-\frac{y_2-1}{x_2-2}$，

化简得$x_1y_2+x_2y_1-\left(x_1+x_2\right)-2\left(y_1+y_2\right)+4=0$.

把$y_1=kx_1+b,y_2=kx_2+b$代入上式，并化简得

$2kx_1x_2+\left(b-1-2k\right)\left(x_1+x_2\right)-4b+4=0$. (*)

由$\begin{cases} y=kx+b, \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1, \end{cases}$ 消去y得$\left(4k^2+1\right)x^2+8kbx+4b^2-8=0$， (**)

则$x_1+x_2=-\dfrac{8kb}{4k^2+1},x_1x_2=\dfrac{4b^2-8}{4k^2+1}$，

代入(*)得$\dfrac{2k\left(4b^2-8\right)}{4k^2+1}-\dfrac{8kb\left(b-1-2k\right)}{4k^2+1}-4b+4=0$，

整理得$\left(2k-1\right)\left(b+2k-1\right)=0$，

所以$k=\dfrac{1}{2}$或$b=1-2k$.

若$b=1-2k$，可得方程(**)的一个根为2，不合题意.

若$k=\dfrac{1}{2}$时，合题意.

所以直线PQ的斜率为定值，该值为$\dfrac{1}{2}$.

12.解 (1)设椭圆的半焦距为c，

依题意知$\begin{cases} \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \\ \sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{3}, \end{cases}$ 又$a^2=b^2+c^2$，

$\therefore a=\sqrt{3}$，$\therefore c=\sqrt{2}$，$b=1$，

$\therefore$椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)设$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

直线AB的方程为$y=kx+m$.

由已知$\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得$m^2=\dfrac{3}{4}(k^2+1)$.

把$y=kx+m$代入椭圆方程，

整理，得$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$.

$\Delta=36k^2m^2-4(3k^2+1)(3m^2-3)=36k^2-12m^2+12>0$.

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{-6km}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{3m^2-3}{3k^2+1}$.

$\therefore |AB|^2=(1+k^2)(x_2-x_1)^2$

$=(1+k^2)\left[\dfrac{36k^2m^2}{(3k^2+1)^2}-\dfrac{12(m^2-1)}{3k^2+1}\right]$

$=\dfrac{12(k^2+1)(3k^2+1-m^2)}{(3k^2+1)^2}$

$=\dfrac{3(k^2+1)(9k^2+1)}{(3k^2+1)^2}=3+\dfrac{12k^2}{9k^4+6k^2+1}$

$=3+\dfrac{12}{9k^2+\dfrac{1}{k^2}+6}(k\neq0)\leq3+\dfrac{12}{2\times3+6}=4$.

当且仅当$9k^2=\dfrac{1}{k^2}$，即$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时等号成立.

当 $k=0$ 时，直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，

则 $|AB|=\sqrt{3}$.

综上所述，$|AB|_{\max}=2$.

∴当 $|AB|$ 最大时，$\triangle AOB$ 的面积最大，最大值为 $S=\frac{1}{2}\cdot|AB|_{\max}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

巩固练习：

1.答案　B 解析　由题意知，$\frac{4}{\sqrt{m^2+n^2}}>2$，即 $\sqrt{m^2+n^2}<2$，所以 $\frac{m^2}{9}+\frac{n^2}{4}\leq\frac{m^2+n^2}{4}<1$，所以点 $P(m，n)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的内部，故所求交点的个数是 2.

2.答案　D 解析　由已知及椭圆的定义，得 $a=2$，$|AB|+|AF_2|+|BF_2|=4a=8$，所以当线段 AB 的长度取最小值时，$|BF_2|+|AF_2|$ 取最大值．当 AB 垂直于 x 轴时，$|AB|_{\min}=2\times\frac{b^2}{a}=2\times\frac{b^2}{2}=b^2$，所以 $|BF_2|+|AF_2|$ 的最大值为 $8-b^2=5$，所以 $b^2=3$，即 $b=\sqrt{3}$.故选 D.

3.【答案】ABC 解：在椭圆 M 中，$a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$，且 $|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，

对于 A 选项，当 $|PF_1|=|PF_2|$ 时，则 $|PF_1|=|PF_2|=a=2$，

由余弦定理可得 $\cos\angle PF_1F_2=\frac{|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-|PF_2|^2}{2|PF_1|\cdot|F_1F_2|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $0°<\angle PF_1F_2<180°$，所以，$\angle PF_1F_2=30°$，故 A 对;

对于 B 选项，当点 P 为椭圆 M 的短轴顶点时，点 P 到 x 轴的距离最大，

所以，$\triangle F_1PF_2$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times2c\times b=bc=\sqrt{3}$，故 B 对;

对于 C 选项，因为 $a-c\leqslant|PF_2|\leqslant a+c$，即 $2-\sqrt{3}\leqslant|PF_2|\leqslant2+\sqrt{3}$，

所以，$|PF_1|-|PF_2|=2a-2|PF_2|\leqslant2a-2(a-c)=2c=2\sqrt{3}$，故 C 对;

对于 D 选项，当 $PF_1\perp F_1F_2$ 或 $PF_2\perp F_1F_2$ 时，$\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形，

此时满足条件的点 P 有 4 个，

当 P 为直角顶点时，设点 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^2=4-4y_0^2$，

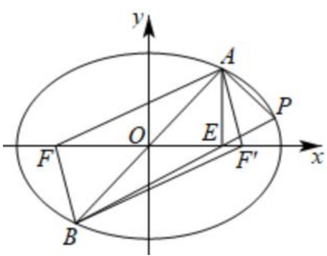
$\overrightarrow{F_1P}=(x_0+\sqrt{3},y_0)$，$\overrightarrow{F_2P}=(x_0-\sqrt{3},y_0)$，$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=x_0^2-3+y_0^2=1-3y_0^2=0$，

所以，$y_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}{}'x_0=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$，此时，满足条件的点 P 有 4 个，

综上所述，满足 $\triangle F_1PF_2$ 是直角三角形的点 P 有 8 个，故 D 错.

故选：ABC.

4【答案】BCD 解：设椭圆 C 的右焦点 F'，由椭圆对称性知线段 AB，FF' 互相平分于点 O，则四边形 $AFBF'$ 为平行四边形，如图，



则$|AF|+|BF|=|AF|+|AF'|=4$，有$\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}=\frac{1}{4}(|AF|+|BF|)(\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|})$

$=\frac{1}{4}(5+\frac{|BF|}{|AF|}+\frac{4|AF|}{|BF|})\geqslant\frac{1}{4}(5+2\sqrt{\frac{|BF|}{|AF|}\cdot\frac{4|AF|}{|BF|}})=\frac{9}{4}$，当且仅当$\frac{|BF|}{|AF|}=\frac{4|AF|}{|BF|}$，即$|BF|=2|AF|=\frac{8}{3}$时取"="，$A$不正确；

设$A(x_0,y_0)$，$x_0y_0\neq 0$，则$1=\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}\geqslant 2\sqrt{\frac{x_0^2}{4}\cdot\frac{y_0^2}{2}}=\frac{|x_0|\cdot|y_0|}{\sqrt{2}}$，当且仅当$\frac{x_0^2}{4}=\frac{y_0^2}{2}$，即

$|x_0|=\sqrt{2}|y_0|=\sqrt{2}$时取"="，

即$|x_0|\cdot|y_0|\leqslant\sqrt{2}$，因$AE\perp x$轴，垂足为$E$，则$S_{\triangle ABE}=2S_{\triangle AOE}=|x_0|\cdot|y_0|\leqslant\sqrt{2}$，$B$正确；

因$A(x_0,y_0)$，有$\frac{y_0}{x_0}=k$，由椭圆对称性可得$B(-x_0,-y_0)$，而$E(x_0,0)$，则直线BE的斜率$k_{BE}=\frac{y_0}{2x_0}=\frac{1}{2}k$，$C$正确；

设$P(m,n)$，由$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$及$\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{2}=1$得，$\frac{m^2-x_0^2}{4}+\frac{n^2-y_0^2}{2}=0$，即$\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}=-\frac{1}{2}$，

直线PA，PB的斜率k_{PA},k_{PB}有$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{n-y_0}{m-x_0}\cdot\frac{n+y_0}{m+x_0}=\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}=-\frac{1}{2}$，而$k_{PB}=k_{BE}=\frac{1}{2}k$，

于是得$k_{PA}=-\frac{1}{k}$，有$k_{AB}\cdot k_{PA}=k\cdot\left(-\frac{1}{k}\right)=-1$，所以$\angle PAB$为直角，$D$正确.

故选：BCD.

5.解析　设AB的中点为G，则由椭圆的对称性知，O为平行四边形$ABCD$的对角线的交点，则$OG\parallel AD$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有$\begin{cases}\frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{4}=1,\\ \frac{x_2^2}{8}+\frac{y_2^2}{4}=1,\end{cases}$两式相减得$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{8}=-\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{4}$，整理得$\frac{x_1+x_2}{2(y_1+y_2)}$

$=-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-k_1=-2$，即$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{4}$.又$G\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，所以$k_{OG}=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}-0}{\frac{x_1+x_2}{2}-0}=-\frac{1}{4}$，即$k_2=-\frac{1}{4}$.

6.解析　当直线l的斜率不存在时，显然不满足条件，故直线l的斜率存在，设直线l：$y=kx+1$，点

$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则由$\begin{cases} y=kx+1, \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1, \end{cases}$ 消去 y，整理得$(9k^2+5)x^2+18kx-36=0$，$\Delta=(18k)^2+4\times36\times(9k^2+5)>0$，$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{18k}{9k^2+5}, \\ x_1x_2=-\frac{36}{9k^2+5}, \\ x_1=-\frac{2}{3}x_2, \end{cases}$ 由此解得 $k=\pm\frac{1}{3}$，即直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{1}{3}x+1$.

7. 【详解】(1) 解：设椭圆 E 的方程为 $mx^2+ny^2=1$，过 $A(0,-2), B\left(\frac{3}{2},-1\right)$，

则$\begin{cases} 4n=1 \\ \frac{9}{4}m+n=1 \end{cases}$，解得 $m=\frac{1}{3}$， $n=\frac{1}{4}$，

所以椭圆 E 的方程为： $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

(2) $A(0,-2), B(\frac{3}{2},-1)$，所以 $AB: y+2=\frac{2}{3}x$，

①若过点 $P(1,-2)$ 的直线斜率不存在，直线 $x=1$.代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$，

可得 $M(1,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$， $N(1,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，代入 AB 方程 $y=\frac{2}{3}x-2$，可得

$T(-\sqrt{6}+3,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$，由 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$ 得到 $H(-2\sqrt{6}+5,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$.求得 HN 方程：

$y=(2+\frac{2\sqrt{6}}{3})x-2$，过点 $(0,-2)$.

②若过点 $P(1,-2)$ 的直线斜率存在，设 $kx-y-(k+2)=0, M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases} kx-y-(k+2)=0 \\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得 $(3k^2+4)x^2-6k(2+k)x+3k(k+4)=0$，

可得$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{6k(2+k)}{3k^2+4} \\ x_1x_2=\frac{3k(4+k)}{3k^2+4} \end{cases}$，$\begin{cases} y_1+y_2=\frac{-8(2+k)}{3k^2+4} \\ y_1y_2=\frac{4(4+4k-2k^2)}{3k^2+4} \end{cases}$，

且 $x_1y_2+x_2y_1=\frac{-24k}{3k^2+4}$ (*)

联立$\begin{cases} y=y_1 \\ y=\frac{2}{3}x-2 \end{cases}$，可得 $T(\frac{3y_1}{2}+3, y_1), H(3y_1+6-x_1, y_1)$.

可求得此时 $HN: y-y_2=\frac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$，

将 $(0,-2)$，代入整理得 $2(x_1+x_2)-6(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3y_1y_2-12=0$，

将(*)代入，得 $24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0$,

显然成立，

综上，可得直线 HN 过定点 $(0,-2)$.

8.解　(1)易知点 $F(c,0)$，$B(0,b)$，

故 $|BF|=\sqrt{c^2+b^2}=a=\sqrt{5}$，

因为椭圆的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

故 $c=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

因此椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$.

(2)设点 $M(x_0,y_0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 上一点，

由题意，知 $y_0\neq 0$，

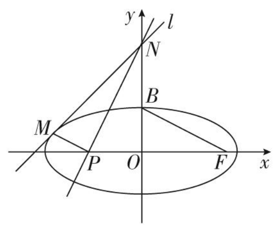
先证明直线 MN 的方程为 $\frac{x_0x}{5}+y_0y=1$，

联立 $\begin{cases}\frac{x_0x}{5}+y_0y=1,\\ \frac{x^2}{5}+y^2=1,\end{cases}$

消去 y，并整理得 $x^2-2x_0x+x_0^2=0$，

$\Delta=4x_0^2-4x_0^2=0$，

因此椭圆 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{5}+y_0y=1$.



在直线 MN 的方程中，令 $x=0$，可得 $y=\frac{1}{y_0}$，由题意可知 $y_0>0$，

即点 $N\left(0,\frac{1}{y_0}\right)$，

直线 BF 的斜率为 $k_{BF}=-\frac{b}{c}=-\frac{1}{2}$，

所以直线 PN 的方程为 $y=2x+\frac{1}{y_0}$，

在直线 PN 的方程中，令 $y=0$，可得 $x=-\frac{1}{2y_0}$，即点 $P\left(-\frac{1}{2y_0},0\right)$，

因为 $MP\parallel BF$，所以 $k_{MP}=k_{BF}$，

即 $\frac{y_0}{x_0+\frac{1}{2y_0}}=\frac{2y_0^2}{2x_0y_0+1}=-\frac{1}{2}$，

所以 $4y_0^2+2x_0y_0+1=0$，

所以 $4y_0^2+2x_0y_0+\frac{x_0^2}{5}+y_0^2=0$，

整理可得 $(x_0+5y_0)^2=0$，

所以 $x_0=-5y_0$，所以 $\frac{x_0^2}{5}+y_0^2=6y_0^2=1$，

又 $y_0>0$，故 $y_0=\frac{\sqrt{6}}{6}$，$x_0=-\frac{5\sqrt{6}}{6}$，

所以直线 l 的方程为 $-\frac{\sqrt{6}}{6}x+\frac{\sqrt{6}}{6}y=1$，即 $x-y+\sqrt{6}=0$.