

高二数学复习小练 1

一、单选题

1. 已知 $a < 0$, 直线 $l_1: ax + 2y + 1 = 0$ 与直线 $l_2: x + (a + 1)y - 4 = 0$ 平行, 则它们之间的距离为()
- A. $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{5}$ 或 $\frac{7\sqrt{2}}{4}$
2. 设 A 是圆 $(x + 1)^2 + y^2 = 9$ 上的动点, PA 是圆的切线, 且 $|PA| = 4$, 则点 P 到点 $Q(5, 8)$ 距离的最小值为()
- A. 5 B. 4 C. 6 D. 15
3. 已知原点到直线 l 的距离为1, 圆 $(x - 2)^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 4$ 与直线 l 相切, 则满足条件的直线 l 有()
- A. 1条 B. 2条 C. 3条 D. 4条

二、多选题

4. 下列说法错误的是()
- A. 若直线 $a^2x - y + 1 = 0$ 与直线 $x - ay - 2 = 0$ 互相垂直, 则 $a = -1$
- B. 直线 $x\sin\alpha + y + 2 = 0$ 的倾斜角 θ 的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$
- C. 过 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 两点的所有直线的方程为 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
- D. 经过点 $(1, 1)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距都相等的直线方程为 $x + y - 2 = 0$
5. 瑞士著名数学家欧拉在1765年提出定理: 三角形的外心、重心、垂心位于同一直线上. 这条直线被后人称为三角形的“欧拉线”. 在平面直角坐标系中作 $\triangle ABC$, $AB = AC$, 点 $B(-1, 3)$, 点 $C(4, -2)$, 且其“欧拉线”与圆 $M: (x + 3)^2 + y^2 = r^2$ 相切, 则下列结论正确的是()
- A. $\triangle ABC$ 的“欧拉线”方程为 $y = x - 1$
- B. 圆 M 上点到直线 $x + y + 2 = 0$ 的最大距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- C. 若点 (x, y) 在圆 M 上, 则 $x + \sqrt{3}y$ 的最小值是 $-3 - 4\sqrt{2}$
- D. 若点 (x, y) 在圆 M 上, 则 $\frac{y-1}{x}$ 的最大值是7
6. 过直线 $l: 2x + y = 5$ 上一点 P 作圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的切线, 切点分别为 A, B , 则()
- A. 若直线 $AB \parallel l$, 则 $|AB| = \sqrt{5}$ B. $\cos\angle APB$ 的最小值为 $\frac{3}{5}$
- C. 直线 AB 过定点 $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ D. 线段 AB 的中点 D 的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{5}}{10}\pi$

三、填空题

7. 过点 $B(5, -1)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 25$ 相切的直线方程为_____.
8. 直线 $y = kx + 3$ 被圆 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 则直线的倾斜角为_____.
9. 已知入射光线经过点 $M(-3, 4)$, 被直线 $l: x - y + 3 = 0$ 反射, 反射光线经过点 $N(2, 6)$, 则反射光线所在直线的方程为_____.

四、解答题

10. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(1, 2)$, AB 边上的中线所在直线的方程为 $x + 3y = 0$, AC 边上的高 BH 所在直线的方程为 $2x - 3y - 4 = 0$. (1)求点 B, C 的坐标; (2)求 $\triangle ABC$ 的面积.

11. 已知半径为2, 圆心在直线 $y = -x + 2$ 上的圆 C .

(1)当圆 C 经过点 $A(2, 2)$ 且与 y 轴相切时, 求圆 C 的方程;

(2)已知 $E(1, 1), F(1, -3)$, 若圆 C 上存在点 Q , 使 $|QF|^2 - |QE|^2 = 32$, 求圆心的横坐标 a 的取值范围.

12. 已知圆 $C: (x - a)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$, 四点 $P_1(1, 1), P_2(0, 2), P_3(1, \sqrt{3}), P_4(1, -\sqrt{3})$ 恰有三点在圆 C 上.

(1)求圆 C 的方程;

(2)设以 k 为斜率的直线 l 经过点 $Q(4, -2)$, 但不经过点 P_2 , 若 l 与圆 C 相交于同两点 A, B .

(i)求 k 的取值范围;

(ii)证明: 直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率之和为定值.

巩固练习：

1. 若直线 $l: kx - y + 4 + 2k = 0$ 与曲线 $y = \sqrt{4 - x^2}$ 有两个交点，则实数 k 的取值范围是()

A. $\{k|k = \pm 1\}$

B. $\{k|k < -\frac{3}{4}\}$

C. $\{k|-1 \leq k < -\frac{3}{4}\}$

D. $\{k|-1 \leq k < \frac{3}{4}\}$

2. 已知圆 $C: (x - 2)^2 + y^2 = 2$ ，直线 $l: y = kx - 2$ ，若直线 l 上存在点 P ，过点 P 引圆的两条切线 l_1, l_2 ，使得 $l_1 \perp l_2$ ，则实数 k 的取值范围是()

A. $[0, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty)$

B. $[2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$

C. $(-\infty, 0)$

D. $[0, +\infty)$

3. 已知点 P 在圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上，点 $A(3,0)$ ， $B(0,4)$ ，则()

A. 点 P 到直线 AB 的距离最大值为 $\frac{22}{5}$

B. 满足 $AP \perp BP$ 的点 P 有4个

C. 过点 B 作圆 O 的两切线，切点分别为 M, N ，则直线 MN 的方程为 $y = 1$

D. $2|PA| + |PB|$ 的最小值是 $2\sqrt{10}$

4. 已知 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上的两点，则下列结论中正确的()

A. 若 $|AB| = 2\sqrt{3}$ ，则 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$

B. 若点 O 到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$ ，则 $|AB| = 2\sqrt{2}$

C. 若 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ ，则 $|x_1 + y_1 - 1| + |x_2 + y_2 - 1|$ 的最大值为4

D. $x_1x_2 + y_1y_2$ 的最小值为-4

5. 在平面直角坐标系 xOy 中， $A(-12,0)$ ， $B(0,6)$ ，点 P 在圆 $O: x^2 + y^2 = 50$ 上. 若 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \leq 20$ ，则点 P 的横坐标的取值范围是_____.

6. 已知两直线 $l_1: x - 2y + 4 = 0$ ， $l_2: 4x + 3y + 5 = 0$. 则直线 l_1 与 l_2 交点 P 的坐标为_____，设 $A(-3,3)$ ， $B(1,1)$ ，求过点 P 且与 A, B 距离相等的直线方程为_____.

7. 圆 O_1 的方程为 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$, 圆 O_2 的圆心 $O_2(2,1)$.

(1)若圆 O_2 与 O_1 外切, 求 O_2 的方程, 并求内公切线方程;

(2)若圆 O_2 与圆 O_1 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 2\sqrt{2}$.求圆 O_2 的方程.

8. 已知圆 C 经过点 $M(-2,0)$, $N(0,2)$ 两点, 且圆心在直线 $x - y = 0$ 上.

(1)求圆 C 的方程;

(2)已知 l_1, l_2 是过点 $(0,1)$ 且互相垂直的两条直线, 且 l_1 与 C 交于 A, B 两点, l_2 与 C 交于 P, Q 两点, 求四边形 $APBQ$ 面积的最大值.

答案和解析

1. 【答案】A

【解析】 【分析】

本题主要考查了两平行直线之间的距离问题，属于基础题.

根据平行线间的关系求出 a 的值，然后利用两平行直线之间的距离公式即可得解.

【解答】解：若直线 $l_1: ax + 2y + 1 = 0$ 与直线 $l_2: x + (a + 1)y - 4 = 0$ 平行， $a < 0$,

可得 $\frac{a}{1} = \frac{2}{a+1} \neq \frac{1}{-4}$ ，解得 $a = -2$ 或 $a = 1$ (舍);

当 $a = -2$ 时，直线 $l_1: x - y - \frac{1}{2} = 0$ 与直线 $l_2: x - y - 4 = 0$ 平行，

则两直线间的距离为 $\frac{|\frac{1}{2} + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$.

故选 A.

2. 【答案】A

【解析】解：设点 $P(x, y)$ ，由于圆 $(x + 1)^2 + y^2 = 9$ 的圆心为 $C(-1, 0)$ 、半径为3，

由勾股定理可得 $CA^2 + PA^2 = PC^2$ ，即 $9 + 16 = (x + 1)^2 + y^2$ ，即 $(x + 1)^2 + y^2 = 25$ ，故点 P 在以 $C(-1, 0)$ 、半径为5的圆上.

而 $CQ = \sqrt{(5 + 1)^2 + (8 - 0)^2} = 10$ ，故点 P 到点 $Q(5, 8)$ 距离的最小值为 $10 - 5 = 5$ ，

故选：A.

设点 $P(x, y)$ ，根据圆的切线性质求得即 $(x + 1)^2 + y^2 = 25$ ，故点 P 在以 $C(-1, 0)$ 、半径为5的圆上. 再根据 $CQ = 10$ ，可得点 P 到点 $Q(5, 8)$ 距离的最小值.

本题主要考查圆的标准方程，求点的轨迹方程，圆的切线性质，属于基础题.

3. 【答案】C

【解析】 【分析】

本题主要考查点到直线的距离，圆与圆位置关系，先求出两圆的圆心和半径，判断两个圆的位置关系，从而确定公切线的直线条数.

【解答】

解： $\because (x - 2)^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 4$,

$\therefore$ 圆心坐标 $(2, \sqrt{5})$ ，半径为2，

$\therefore$ 以坐标原点为圆心，以1为半径，

∴圆方程 $x^2 + y^2 = 1$,

∴两圆圆心距 $\sqrt{5+2^2} = 3$,

∴两圆相外切,

∴两圆有三条公切线, (两条外公切线, 一条内公切线).

故选 C.

4. 【答案】ACD

【解析】 【分析】

反例判断A; 求出直线 $xsina + y + 2 = 0$ 的倾斜角 θ 的取值范围判断B; 两点式的条件判断C; 反例判断D.

本题考查命题的真假的判断与应用, 直线的垂直以及直线的倾斜角与向量的关系, 两点式方程等基本知识的考查.

【解答】

解: 当 $a = 0$ 时, 直线 $a^2x - y + 1 = 0$ 与直线 $x - ay - 2 = 0$ 也互相垂直, 所以选项 A 不正确;

直线 $xsina + y + 2 = 0$ 的倾斜角 θ , 可得 $\tan\theta = -sina \in [-1, 1]$,

所以 θ 的取值范围是 $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$; 所以 B 正确;

当直线与坐标轴不平行, 不重合时, 过 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 两点的所有直线的方程为 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, 所以C不正确.

经过点(1,1)且在x轴和y轴上截距都相等的直线方程为 $x + y - 2 = 0$, 或 $y = x$, 所以D不正确;

故选: ACD.

5. 【答案】ACD

【解析】 【分析】

本题考查直线方程的求法, 直线与圆的位置关系, 点到直线的距离, 属较难题.

由题意可得三角形ABC的欧拉线为线段BC的中垂线, 求出BC的中垂线方程判断A; 由欧拉线与圆M相切可得, 圆心M到欧拉线的距离等于半径可得r的值, 由圆上的点到直线的距离的最大值为圆心到直线的距离加半径判断B; 令 $t = x + \sqrt{3}y$, 得 $y = \frac{t-x}{\sqrt{3}}$, 代入圆的方程, 由方程有根求出t的范围判断C; $\frac{y-1}{x}$ 表示圆上的点(x,y)与(0,1)连线的斜率, 设 $\frac{y-1}{x} = k$, 利用点到直线的距离公式得到不等式, 即可求出k的取值范围, 从而判断D.

【解答】

解：∵ $AB = AC$ ，由题意可得 $\triangle ABC$ 的欧拉线为 BC 的中垂线，

由 $B(-1, 3)$ ， $C(4, -2)$ 可得 BC 的中点为 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ ，且 $k_{BC} = \frac{3+2}{-1-4} = -1$ ，

∴ 线段 BC 的中垂线方程为 $y - \frac{1}{2} = x - \frac{3}{2}$ ，即 $x - y - 1 = 0$ ，故 A 正确；

∵ $\triangle ABC$ 的“欧拉线”与圆 $M: (x+3)^2 + y^2 = r^2$ 相切，

∴ 圆心 $(-3, 0)$ 到直线 $x - y - 1 = 0$ 的距离 $d = r = \frac{|-3-0-1|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ ，

∴ 圆 M 的方程为 $(x+3)^2 + y^2 = 8$ ，

∴ 圆心 $(-3, 0)$ 到直线 $x + y + 2 = 0$ 的距离 $d = \frac{|-3+0+2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

∴ 圆 M 上点到直线 $x + y + 2 = 0$ 的距离的最大值为 $d + r = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ，故 B 错误；

令 $t = x + \sqrt{3}y$ ，∴ $y = \frac{t-x}{\sqrt{3}}$ ，代入圆 M 的方程 $(x+3)^2 + y^2 = 8$ ，

可得 $4x^2 + (18-2t)x + t^2 + 3 = 0$ ，

由于 (x, y) 在圆上，∴ $4x^2 + (18-2t)x + t^2 + 3 = 0$ 有根，

则 $\Delta = (18-2t)^2 - 4 \times 4 \times (t^2 + 3) \geq 0$ ，整理得 $t^2 + 6t - 23 \leq 0$ ，

解得 $-3 - 4\sqrt{2} \leq t \leq -3 + 4\sqrt{2}$ ，

∴ t 的最小值为 $-3 - 4\sqrt{2}$ ，即 $x + \sqrt{3}y$ 的最小值为 $-3 - 4\sqrt{2}$ ，故 C 正确；

因为 $\frac{y-1}{x}$ 表示圆上的点 (x, y) 与 $(0, 1)$ 连线的斜率，

设 $\frac{y-1}{x} = k$ ，则 $y - 1 = kx$ ，即 $kx - y + 1 = 0$ ，

所以 $\frac{|-3k+1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} \leq 2\sqrt{2}$ ，即 $k^2 - 6k - 7 \leq 0$ ，解得 $-1 \leq k \leq 7$ ，

所以 $\frac{y-1}{x}$ 的最大值为 7，故 D 正确；

故选：ACD.

6. 【答案】BC

【解析】【分析】

本题主要考查直线与圆的位置关系，属于较难题.

根据题意得到直线 AB 的方程，再结合选项求解即可.

【解答】

解：由题知，设 $P(x_0, y_0)$ ，因为过点 P 作圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的切线，切点分别为 A, B ，所以 A, B 在以 OP 为直径的圆上，即 A, B 在 $(x - \frac{x_0}{2})^2 + (y - \frac{y_0}{2})^2 = (\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2})^2$ 上，因为 A, B 是切点，所以 A, B 在 $x^2 + y^2 = 1$ 上，

故 A, B 是两圆的交点, 故两圆方程相减可得 A, B 所在的直线方程, 化简可得 $AB: x_0x + y_0y = 1$, 因为 P 在 l 上, 所以 $2x_0 + y_0 = 5$, 故直线 $AB: x_0x + (5 - 2x_0)y = 1$;

关于选项 A , 若 $AB \parallel l$, 则 $-2 = -\frac{x_0}{5-2x_0}$, 解得: $x_0 = 2$, 所以 $AB: 2x + y - 1 = 0$, 故圆心 O 到 AB 的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

所以 $AB = 2\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \neq \sqrt{5}$, 故选项 A 错误;

由 $AB: x_0x + (5 - 2x_0)y = 1$, 即 $x_0(x - 2y) + 5y = 1$, 联立 $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 5y = 1 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$, 所以 AB 过定点 $M(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$,

故选项 C 正确;

因为 $\angle APB + \angle AOB = \pi$, 所以 $\cos \angle APB = \cos(\pi - \angle AOB) = -\cos \angle AOB$, 由于 AB 过定点 $M(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, 所以 O 到

AB 距离 $d_{\max} = OM = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 记 AB 中点为 Q , 则 $OM \geq OQ$, $\cos \angle APB = -\cos \angle AOB = -\cos 2\angle AOQ =$

$-(2\cos^2 \angle AOQ - 1) = 1 - 2\cos^2 \angle AOQ = 1 - 2(\frac{OQ}{r})^2 \geq 1 - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$, 故选项 B 正确;

因为 D 为线段 AB 的中点, 且 M 在 AB 上, 所以 $\angle MDO = \frac{\pi}{2}$, 所以 D 点轨迹为以 OM 为直径的圆, 所以 $r = \frac{OM}{2} = \frac{\sqrt{5}}{10}$,

周长为 $2\pi r = \frac{\sqrt{5}}{5}\pi$, 故选项 D 错误. 故选: BC

7. 【答案】 $x = 5$ 或 $12x - 5y - 65 = 0$

【解析】 【分析】

本题考查圆的切线方程的计算, 注意分析直线的斜率是否存在, 属于基础题.

根据题意, 分2种情况讨论: ①, 要求直线的斜率不存在, 则直线的方程为 $x = 5$, 验证是否与圆相切, ②, 要求直线的斜率存在, 设其方程为 $y + 1 = k(x - 5)$, 由直线与圆的位置关系可得 k 的值, 即可得此时直线的方程, 综合2种情况即可得答案.

【解答】

解: 根据题意, 分2种情况讨论:

①, 要求直线的斜率不存在, 则直线的方程为 $x = 5$, 与圆 $x^2 + y^2 = 25$ 相切, 符合题意;

②, 要求直线的斜率存在, 设其方程为 $y + 1 = k(x - 5)$, 即 $kx - y - 5k - 1 = 0$,

要求直线与圆 $x^2 + y^2 = 25$ 相切, 则有 $\frac{|-5k-1|}{\sqrt{1+k^2}} = 5$, 解可得 $k = \frac{12}{5}$,

此时要求直线的方程为: $12x - 5y - 65 = 0$,

综合可得: 要求直线的方程为: $x = 5$ 或 $12x - 5y - 65 = 0$

故答案为: $x = 5$ 或 $12x - 5y - 65 = 0$

8. 【答案】 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$

【解析】 【分析】

本题考查直线的倾斜角的求法,考查直线与圆的位置关系、点到直线的距离公式等基础知识,属于中档题.
根据直线被圆截得弦长为 $2\sqrt{3}$ 及圆的方程,结合点到直线的距离公式求得 k ,从而根据倾斜角与斜率的关系可求得答案.

【解答】

解: $\because$ 圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ 的圆心 $C(2,3)$, 半径 $r = 2$,

$\because$ 直线 $y = kx + 3$ 被圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$,

$$\therefore \text{圆心} C \text{到直线} kx - y + 3 = 0 \text{的距离} d = \frac{|2k-3+3|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\text{解得} k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{直线的倾斜角为} \frac{\pi}{6} \text{或} \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{故答案为} \frac{\pi}{6} \text{或} \frac{5\pi}{6}.$$

9. 【答案】 $6x - y - 6 = 0$

【解析】 【分析】

本题考查关于直线的对称问题,直线的两点式方程,是基础题.

$$\text{设出} M \text{关于直线的对称点坐标} M'(a, b), \text{由} \begin{cases} \frac{b-4}{a-(-3)} \times 1 = -1 \\ \frac{-3+a}{2} - \frac{b+4}{2} + 3 = 0 \end{cases}, \text{解出} a, b, \text{再由两点式求得方程.}$$

【解答】

解: 设点 $M(-3,4)$ 关于直线 $l: x - y + 3 = 0$ 的对称点为 $M'(a,b)$, 则反射光线所在直线过点 M' ,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{b-4}{a-(-3)} \times 1 = -1 \\ \frac{-3+a}{2} - \frac{b+4}{2} + 3 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} a = 1, b = 0.$$

$$\text{又反射光线经过点} N(2,6), \text{所以所求直线的方程为} \frac{y-0}{6-0} = \frac{x-1}{2-1}, \text{即} 6x - y - 6 = 0.$$

$$\text{故答案为} 6x - y - 6 = 0.$$

$$10. \text{【答案】 解: (1)由} BH \perp AC, \text{则} k_{AC} = -\frac{3}{2},$$

$$\text{则直线} AC \text{的方程为} y = -\frac{3}{2}(x-1) + 2 \text{即} 3x + 2y - 7 = 0,$$

$$\text{又点} C \text{在直线} x + 3y = 0 \text{上, 可得} C(3, -1).$$

设 $B(a, b)$, 则 AB 的中点坐标为 $(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2})$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{1+a}{2} + 3 \cdot \frac{2+b}{2} = 0, \\ 2a - 3b - 4 = 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$, 即 $B(-1, -2)$.

(2)由 $|AC| = \sqrt{(1-3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{13}$,

B 到直线 AC 的距离 $h = \frac{14}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{14}{\sqrt{13}}$,

$\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h = 7$.

【解析】 本题考查点到直线的距离公式, 两点间的距离公式, 两直线垂直关系的应用, 两直线交点坐标等知识, 属于中档题.

(1)由 $BH \perp AC$, 得直线 AC 的方程, 进而求得点 C 坐标, 再结合中点坐标公式列方程组求得点 B 坐标;

(2)求出边长 AC , 再由点到直线的距离公式求得 AC 边上的高即可求出 $\triangle ABC$ 的面积.

11. 【答案】 解: (I) $\because$ 圆心在直线 $y = -x + 2$ 上,

$\therefore$ 可设圆心坐标为 $(a, -a + 2)$,

圆的方程为 $(x - a)^2 + [y - (-a + 2)]^2 = 4$,

$\because$ 圆经过点 $A(2, 2)$ 且与 y 轴相切,

$$\therefore \text{有} \begin{cases} (2 - a)^2 + [2 - (-a + 2)]^2 = 4 \\ |a| = 2 \end{cases},$$

解得 $a = 2$,

$\therefore$ 所求方程是 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$;

(II) 设 $Q(x, y)$,

则由 $|QF|^2 - |QE|^2 = 32$ 得:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 - [(x - 1)^2 + (y - 1)^2] = 32,$$

即 $y = 3$,

$\therefore Q$ 在直线 $y = 3$ 上,

$\because Q$ 在 $(x - a)^2 + [y - (-a + 2)]^2 = 4$ 上,

$\therefore \odot C$ 与直线 $y = 3$ 有交点,

$\because \odot C$ 的圆心纵坐标为 $-a + 2$, 半径为2,

$\therefore \odot C$ 与直线 $y = 3$ 有交点的充要条件是

$$1 \leq -a + 2 \leq 5,$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 1,$$

即圆心的横坐标 a 的取值范围是 $-3 \leq a \leq 1$.

【解析】本题考查圆的方程，考查直线与圆的位置关系，考查学生分析解决问题的能力，属于中等题.

(I)可设圆心坐标为 $(a, -a+2)$ ，圆的方程为 $(x-a)^2 + [y-(-a+2)]^2 = 4$ ，利用圆经过点 $A(2,2)$ 且与 y 轴相切，建立方程，即可求圆 C 的方程；

(II)设 $Q(x, y)$ ，则由 $|QF|^2 - |QE|^2 = 32$ 得 $y = 3$ ，即 Q 在直线 $y = 3$ 上，根据 Q 在 $(x-a)^2 + [y-(-a+2)]^2 = 4$ 上，可得 $\odot C$ 与直线 $y = 3$ 有交点，从而可求圆心的横坐标 a 的取值范围.

12.【答案】解：(1)注意 P_1, P_2, P_3 的横坐标一样，而圆的圆心 $C(a, 0)$ 在 x 轴上，根据圆的对称性可知， P_1 不在圆上，

$$\text{则} \begin{cases} (0-a)^2 + 2^2 = r^2 \\ (1-a)^2 + (\sqrt{3})^2 = r^2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 0 \\ r = 2 \end{cases},$$

则圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$;

(2)(i)设直线 l 的方程为 $y+2 = k(x-4)$ ，即 $kx - y - 4k - 2 = 0$,

依题意， $\frac{|-4k-2|}{\sqrt{k^2+1}} < 2$ ，即 $3k^2 + 4k < 0$ ，解得 $-\frac{4}{3} < k < 0$ ，

又直线 l 不过点 P_2 ，则 $k \neq \frac{-2-2}{4-0} = -1$ ，

故实数 k 的取值范围为 $(-\frac{4}{3}, -1) \cup (-1, 0)$;

(ii)证明：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，联立 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ kx - y - 4k - 2 = 0 \end{cases}$

消去 y 并整理可得， $(1+k^2)x^2 - (8k^2+4k)x + 16k^2+16k = 0$,

$$\text{则} x_1 + x_2 = \frac{8k^2+4k}{1+k^2}, x_1 x_2 = \frac{16k^2+16k}{1+k^2},$$

$$\text{则} k_{P_2 A} + k_{P_2 B} = \frac{y_1-2}{x_1} + \frac{y_2-2}{x_2} = \frac{y_1 x_2 - 2x_2 + y_2 x_1 - 2x_1}{x_1 x_2} = \frac{[k(x_1-4)-2]x_2 + [k(x_2-4)-2]x_1 - 2(x_1+x_2)}{x_1 x_2} =$$

$$\frac{2k x_1 x_2 - (4k+4)(x_1+x_2)}{x_1 x_2} = \frac{2k \cdot \frac{16k^2+16k}{1+k^2} - (4k+4) \cdot \frac{8k^2+4k}{1+k^2}}{\frac{16k^2+16k}{1+k^2}} = \frac{-16k^2-16k}{16k^2+16k} = -1, \text{为定值}.$$

【解析】(1)易知 P_1 不在圆上，由此可建立关于 a, r 的方程组，解出即可；

(2)(i)设出直线 l 的方程，利用圆心到直线的距离小于半径，可得到 k 的取值范围，再结合不过点 P_2 ，可得解；

(ii)联立直线与圆的方程，得到两根之和与两根之积，再化简直线 $P_2 A$ 与直线 $P_2 B$ 的斜率之和为定值即可得证.

本题考查直线与圆的综合运用，考查运算求解能力，属于中档题.

巩固练习

1. 【答案】C

【解析】 【分析】

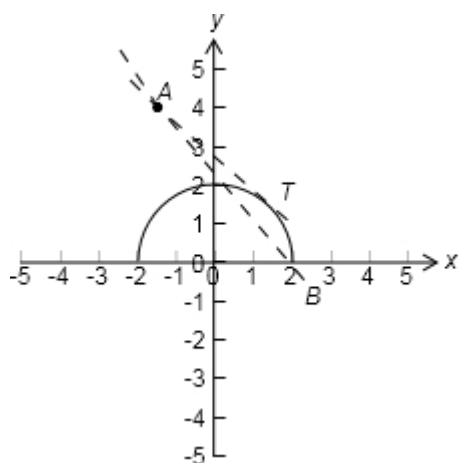
本题考查了直线与二次曲线的交点问题、点到直线的距离以及斜率公式，常先化简曲线的方程，一定要注意做到同解变形，数形结合解决参数的范围问题，属于中档题.

将曲线方程变形判断出曲线是上半圆；将直线方程变形据直线方程的点斜式判断出直线过定点；画出图形，数形结合求出满足题意的 k 的范围.

【解答】

解：曲线 $y = \sqrt{4 - x^2}$ 即 $x^2 + y^2 = 4, (y \geq 0)$

表示一个以 $(0,0)$ 为圆心，以2为半径的位于 x 轴上方的半圆，如图所示：



直线 $l: kx - y + 4 + 2k = 0$ 即 $y = k(x + 2) + 4$,

表示恒过点 $(-2, 4)$ 斜率为 k 的直线

结合图形可得 $k_{AB} = \frac{4}{-4} = -1$,

$\therefore \frac{|4+2k|}{\sqrt{1+k^2}} = 2$ 解得 $k = -\frac{3}{4}$, 即 $k_{AT} = -\frac{3}{4}$,

$\therefore$ 要使直线与半圆有两个不同的交点， k 的取值范围是 $[-1, -\frac{3}{4})$.

故选 C.

2. 【答案】D

【解析】 【分析】

本题主要考查直线与圆的位置关系，轨迹方程的求解与应用，等价转化的数学思想等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

由题意结合几何性质可知点 P 的轨迹方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ，则原问题转化为圆心到直线的距离小于等于半径，据此求解关于 k 的不等式即可求得实数 k 的取值范围.

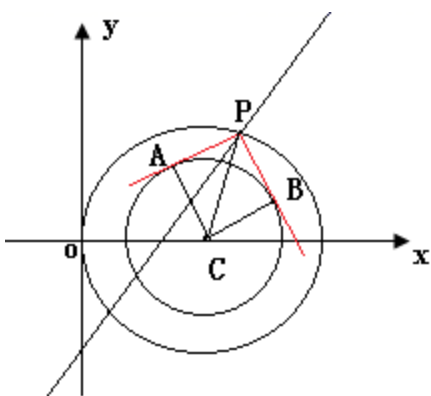
【解答】

解：圆 $C(2,0)$ ，半径 $r = \sqrt{2}$ ，设 $P(x,y)$ ，

因为两切线 $l_1 \perp l_2$ ，如下图， $PA \perp PB$ ，由切线性质定理，知：

$PA \perp AC$ ， $PB \perp BC$ ， $PA = PB$ ，所以，四边形 $PACB$ 为正方形，所以， $|PC| = 2$ ，

则： $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ，即点 P 的轨迹是以 $(2,0)$ 为圆心，2为半径的圆.



直线 $l: y = kx - 2$ 过定点 $(0, -2)$ ，直线方程即 $kx - y - 2 = 0$ ，

只要直线与 P 点的轨迹(圆)有交点即可，即大圆的圆心到直线的距离小于等于半径，

即： $d = \frac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}} \leq 2$ ，解得： $k \geq 0$ ，

即实数 k 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

故选 D.

3. 【答案】ACD

【解析】 【分析】

本题考查直线与圆的位置关系以及与圆有关的最值问题，属于中档题，

利用点到直线距离判断选项 A，利用利用的位置关系判断选项 B，利用圆的切线方程判断选项 C，对于 D；

根据题意，设 $C(0,t)$ 使得点 P 在圆 O 上任意移动时均有 $|PC| = \frac{1}{2}|PB|$ ，设 $P(x,y)$ ，由题意，求出该圆的方程，与圆 O 的方程联立可得点 C ，分析可得答案.

【解答】

解：对于 A：直线 AB 方程为 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ ，即 $4x + 3y - 12 = 0$ ，圆心 $(0,0)$ 到直线距离为 $d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5}$ ，

圆的半径为2，所以点 P 到直线 AB 的距离最大值为 $\frac{12}{5} + 2 = \frac{22}{5}$ ，即 A 正确；

对于B: 以线段AB为直径的圆的方程为 $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{4}$,

设该圆圆心为M, 则 $OM = \frac{5}{2}$, 因为 $\frac{5}{2} - 2 < OM < \frac{5}{2} + 2$, 所以两圆相交,

所以满足 $AP \perp BP$ 的点P有2个, 即P位两圆交点, 故B不正确;

对于C: 因为过点B作圆O的切线, 切线斜率存在且不等于0, 所以设切线斜率为k,

直线方程为 $y = kx + 4$, 圆心到直线距离为 $\frac{|0 \times k - 0 + 4|}{\sqrt{1+k^2}} = 2$, 解得 $k = \pm\sqrt{3}$,

所以切线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x + 4$, 联立 $x^2 + y^2 = 2$, 得切点坐标为 $(\sqrt{3}, 1)$ 或 $(-\sqrt{3}, 1)$, 所以切点连线方程为 $y = 1$, 即直线MN的方程为 $y = 1$, 故C正确;

对选项D: 即求 $2(|PA| + \frac{1}{2}|PB|)$ 的最小值, 设存在定点 $C(0, t)$,

使得点P在圆O上任意移动时均有 $|PC| = \frac{1}{2}|PB|$,

设 $P(x, y)$, 则有 $\sqrt{x^2 + (y - t)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + (y - 4)^2}$,

化简得 $3x^2 + 3y^2 + 8(1 - t)y = 16 - 4t^2$, $\because x^2 + y^2 = 4$,

则有 $2(1 - t)y = 1 - t^2$, 即 $(1 - t)(2y - 1 - t) = 0$, $\therefore t = 1$, $C(0, 1)$,

所以 $2|PA| + |PB| = 2(|PA| + |PC|) \geq 2|AC| = 2\sqrt{10}$, 所以D正确.

4. 【答案】BD

【解析】 【分析】

本题主要考查与圆有关的问题, 同时考查弦长、点到直线距离等, 属于中档题.

【解答】

解: 对A, 若 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 又 $|OA| = |OB| = 2$, $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$, 故A错;

对B, 若点O到直线AB的距离为 $\sqrt{2}$, 由勾股定理知 $\frac{1}{2}|AB| = \sqrt{2}$, 故B对;

对C, $|x_1 + y_1 - 1| + |x_2 + y_2 - 1| = \sqrt{2}(\frac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}})$, 几何意义为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 到直线 $x + y - 1 = 0$ 的距离之和的 $\sqrt{2}$ 倍,

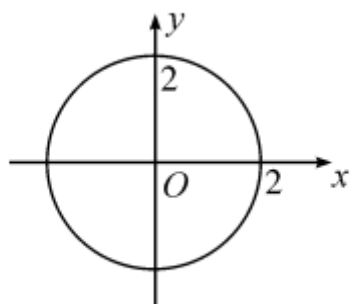
设AB中点为Q, $|x_1 + y_1 - 1| + |x_2 + y_2 - 1| = 2\sqrt{2} \times \frac{|x_Q + y_Q - 1|}{\sqrt{2}}$, 而AB中点Q的轨迹为O: $x^2 + y^2 = 2$, 所

以 $(\frac{|x_Q + y_Q - 1|}{\sqrt{2}})_{\max} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$,

所以 $|x_1 + y_1 - 1| + |x_2 + y_2 - 1|$ 的最大值为6, 故C错;

对D, $x_1x_2 + y_1y_2 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \times 2 \times \cos < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} >$ 的最小值为-4, 故D对;

综上所述，选 BD .



5. 【答案】 $[-5\sqrt{2}, 1]$

【解析】 【分析】

本题主要考查圆与圆的位置关系的应用，及数形结合思想的运用，属于中档题.

利用平面向量数量积坐标运算，结合圆与圆位置关系数形结合可得.

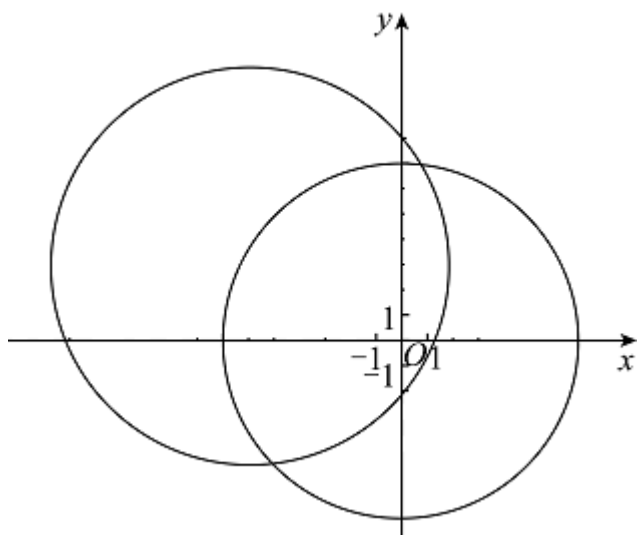
【解答】

解：设 $P(x, y)$ ，由 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \leq 20$ ，得 $(-12 - x)(-x) + (-y)(6 - y) \leq 20$ ，

即 $x^2 + y^2 + 12x - 6y \leq 20$.

整理得 $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 \leq 65$ ，

则 P 为圆 O 在圆 $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 65$ 上及圆内部分，



联立方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ x^2 + y^2 + 12x - 6y = 20. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-5, \\ y=-5 \end{cases}$,

结合图象可得点 P 的横坐标的取值范围是 $-5\sqrt{2} \leq x \leq 1$.

故答案为 $[-5\sqrt{2}, 1]$.

6. 【答案】解: (I) 由 $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 4x+3y+5=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$, $\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-2, 1)$.

(II) 设过点 P 且与 A, B 距离相等的直线为 l , 则有以下两种情况:

① $l \parallel AB$ 时, $k_{AB} = \frac{3-1}{-3-1} = -\frac{1}{2}$, 不妨设直线 l 方程为: $y = -\frac{1}{2}x + b$,

$\because$ 直线 l 过点 P , $\therefore 1 = -\frac{1}{2} \times (-2) + b$, 得 $b = 0$,

$\therefore$ 直线方程为: $y = -\frac{1}{2}x$, 即 $x + 2y = 0$.

② 当 l 过线段 AB 中点时, 不妨设线段 AB 中点为 M , 则由中点坐标公式得 $M(-1, 2)$.

$\because k_l = k_{PM} = \frac{1-2}{-2+1} = 1$,

$\therefore$ 所求的直线方程为: $y - 2 = x + 1$, 即 $x - y + 3 = 0$.

综上所述, 所求直线方程为: $x + 2y = 0$ 或 $x - y + 3 = 0$.

【解析】 本题考查了相互平行的直线斜率之间的关系、中点坐标公式、两条直线的交点坐标, 考查了推理能力与计算能力, 属于基础题.

(I) 由 $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 4x+3y+5=0 \end{cases}$, 解得点 P 的坐标.

(II) 设过点 P 且与 A, B 距离相等的直线为 l , 则有以下两种情况: ① $l \parallel AB$ 时, $k_{AB} = \frac{3-1}{-3-1} = -\frac{1}{2}$, 不妨设直线 l 方程为: $y = -\frac{1}{2}x + b$, 根据直线 l 过点 P , 代入解得 b .

② 当 l 过线段 AB 中点时, 不妨设线段 AB 中点为 M , 由中点坐标公式得 $M(-1, 2)$. 利用点斜式即可得出.

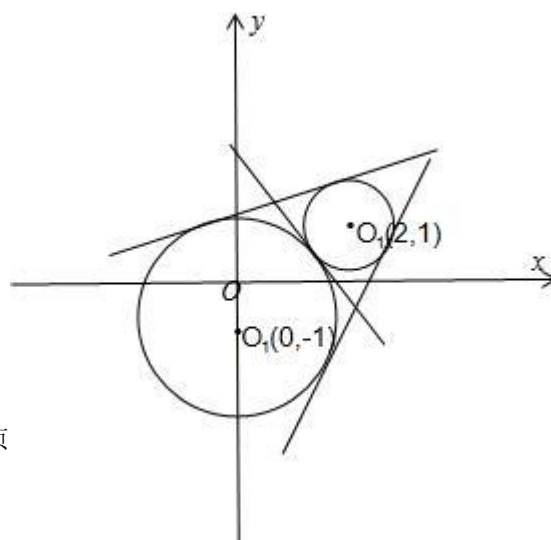
7. 【答案】解: (1) 由圆 O_1 的方程可得圆心 $O_1(0, -1)$, 半径 $r_1 = 2$, 设圆 O_2 的半径为 r_2 ,

由题意可得圆心距 $|O_1O_2| = \sqrt{2^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}$,

由两圆外切可得 $r_1 + r_2 = |O_1O_2|$, 即 $2 + r_2 = 2\sqrt{2}$, 可得 $r_2 = 2\sqrt{2} - 2$,

所以圆 O_2 的方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2}-2)^2$;

联立 $\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = 4 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2}-2)^2 \end{cases}$, 作差整理可得: $x + y + 1 - 2\sqrt{2} = 0$;



(2) 设圆 O_2 的方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = r_2^2$, 圆 O_1 的方程为 $x^2 + (y+1)^2 = 4$,

可得两圆的方程相减, 即为两圆公共弦 AB 所在的直线的方程: 即 $4x + 4y + r_2^2 - 8 = 0$,

可得 O_1 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|-4+r_2^2-8|}{\sqrt{4^2+4^2}} = \frac{|r_2^2-12|}{4\sqrt{2}}$,

由弦长 $|AB| = 2\sqrt{4-d^2} = 2\sqrt{2}$, 可得 $d^2 = 2$, 即 $(\frac{|r_2^2-12|}{4\sqrt{2}})^2 = 2$, 可得 $r_2^2 = 4$ 或 $r_2^2 = 20$,

所以圆 O_2 的方程为: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ 或 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$.

【解析】(1) 由两圆外切可得圆 O_2 的半径, 进而求出圆 O_2 的方程, 两圆相减可得内公切线的方程;

(2) 设圆 O_2 的半径, 可得其圆的方程, 两圆相减可得交线的方程, 求出 O_1 到交线的距离 d , 由半个弦长, 点到直线的距离, 半径的关系, 可得 O_2 的半径, 进而求出交线的方程.

本题考查求圆的方程即直线与圆的方程的综合应用, 属于中档题.

8. 【答案】解: (1) 根据题意, 点 $M(-2,0)$, $N(0,2)$, 则线段 MN 的中垂线方程为 $x+y=0$,

圆心为直线 $x-y=0$ 和 $x+y=0$ 的交点,

则有 $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$, 解得 $x=y=0$, 所以圆 C 的圆心坐标为 $(0,0)$;

半径 $r = \sqrt{(0+2)^2 + (0-0)^2} = 2$,

所以圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$;

(2) 根据题意, 已知 l_1 、 l_2 是互相垂直的两条直线, 分2种情况讨论:

①, 当直线 l_1 , l_2 , 其中一条直线斜率为0时. 另一条斜率不存在.

不妨令 l_1 的斜率为0, 此时 $|AB| = 2\sqrt{3}$, $|PQ| = 4$

四边形 $APBQ$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times |AB| \times |PQ| = 4\sqrt{3}$

②, 当直线 l_1 , l_2 斜率均存在时, 设直线 l_1 的斜率为 $k(k \neq 0)$

则其方程为 $kx - y + 1 = 0$, 圆心到直线 l_1 的距离为 $d = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$,

于是 $|AB| = 2\sqrt{4 - \frac{1}{k^2+1}}$,

又 l_2 的方程为 $-\frac{1}{k}x - y + 1 = 0$

同理 $|PQ| = 2\sqrt{4 - \frac{1}{(-\frac{1}{k})^2+1}} = 2\sqrt{3 + \frac{1}{k^2+1}}$,

所以四边形 $APBQ$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times |AB| \times |PQ| = 2\sqrt{4 - \frac{1}{k^2+1}} \times \sqrt{3 + \frac{1}{k^2+1}}$

$= 2\sqrt{-(\frac{1}{k^2+1} - \frac{1}{2})^2 + \frac{49}{4}} \leq 2 \times \frac{7}{2} = 7$,

当且仅当 $\frac{1}{k^2+1} = \frac{1}{2}$ 即 $k = \pm 1$ 时，等号成立.

因为 $7 > 4\sqrt{3}$

综上所述，四边形 $APBQ$ 面积的最大值为7.

【解析】 本题考查直线与圆的方程的综合应用，涉及圆的标准方程的求法，属于较难题.

(1)根据题意，求出 MN 的中垂线的方程为 $x + y = 0$ ，分析可得圆心为直线 $x - y = 0$ 和 $x + y = 0$ 的交点，联立直线的方程可得圆心的坐标，进而求出圆的半径，由圆的标准方程可得答案；

(2)根据题意，分2种情况讨论：①，当直线 l_1, l_2 ，其中一条直线斜率为0时，另一条斜率不存在，分析可得四边形 $APBQ$ 的面积；②，当直线 l_1, l_2 斜率均存在时，设直线 l_1 的斜率为 k ，则方程 l_1 的方程为 $kx - y + 1 = 0$ ，用 k 表示四边形 $APBQ$ 的面积，由二次函数分析其最值，综合即可得答案.