

江苏省仪征中学 2023-2024 学年第一学期 高二数学周练 (5)

一、单选题 (本大题共 8 小题, 共 40.0 分。在每小题列出的选项中, 选出符合题目的一项)

1. 已知直线斜率为 k , 且 $-1 \leq k \leq \sqrt{3}$, 那么倾斜角 α 的取值范围是()
A. $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ B. $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$ C. $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ D. $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$
2. 点 $P(-1, 2)$ 到直线 $kx - y - k = 0$ 的距离的最大值为()
A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $3\sqrt{2}$
3. 直线 $2x + (m + 1)y + 4 = 0$ 与直线 $mx + 3y - 2 = 0$ 平行, 则 $m =$
A. 2 B. 2或-3 C. -3 D. -2或-3
4. 设圆 $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ 上的动点 P 到直线 $x + y - 3\sqrt{2} = 0$ 的距离为 d , 则 d 的取值范围是()
A. $[0, 3]$ B. $[2, 4]$ C. $[2, 5]$ D. $[3, 5]$
5. 已知椭圆 $x^2 + my^2 = 1$ 的长轴长是短轴长的2倍, 则实数 m 的值是()
A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ 或4 D. $\frac{1}{2}$ 或2
6. 已知圆 $C_1: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$, 圆 $C_2: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$, 点 M 、 N 分别是圆 C_1 、圆 C_2 上的动点, 点 P 为 x 轴上的动点, 则 $|PN| - |PM|$ 的最大值是()
A. $3\sqrt{5} + 4$ B. 9 C. 7 D. $3\sqrt{5} + 2$
7. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两顶点为 $A(a, 0)$, $B(0, b)$, 左焦点为 F , 在 $\triangle FAB$ 中, $\angle FBA = 90^\circ$, 则椭圆的离心率为()
A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$
8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 $O: x^2 + y^2 = 3$, $T(2, m)$, 若圆 O 上存在以 M 为中点的弦 AB , 且 $AB = 2MT$, 则实数 m 的取值范围是()
A. $[-\sqrt{2}, 0]$ B. $(0, \sqrt{2}]$ C. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ D. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

二、多选题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分。在每小题有多项符合题目要求)

9. 下列结论正确的有()
A. 过点 $A(1, 3)$, $B(-3, 7)$ 的直线的倾斜角为 135°
B. 若直线 $2x + 3y + 6 = 0$ 与直线 $ax - y + 2 = 0$ 垂直, 则 $a = \frac{3}{2}$
C. 已知 $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ 及 x 轴上的动点 P , 则 $|PA| + |PB|$ 的最小值为5
D. 直线 $x + 2y - 4 = 0$ 与直线 $2x + 4y + 1 = 0$ 之间的距离为 $\frac{9\sqrt{5}}{10}$

10. 圆 $O_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 和圆 $O_2: x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 相交于 A, B 两点, 则有()
- A. 公共弦 AB 所在直线方程为 $x - y = 0$
- B. 圆 O_2 上到直线 AB 距离等于1的点有2个
- C. 公共弦 AB 的长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. P 为圆 O_1 上的一个动点, 则 P 到直线 AB 距离的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$
11. 设点 A, F_2, F_1 的坐标分别为 $(-1, 1), (-1, 0), (1, 0)$ 动点 $P(x, y)$ 满足: $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4$, 则下列结论正确的是()
- A. 点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$
- B. $|PA| + |PF_2| < 5$
- C. 有且仅有3个点 P , 使得 $\triangle PAF_1$ 的面积为 $\frac{3}{2}$
- D. $|PA| + |PF_1| > 1$
12. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 的两个焦点, 过 F_1 的斜率存在且不为0的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, P 是 AB 的中点, O 为坐标原点, 则下列说法正确的是()
- A. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{3}{5}$
- B. 存在点 A 使得 $AF_1 \perp AF_2$
- C. 若 $|AF_2| + |BF_2| = 12$, 则 $|AB| = 8$
- D. OP 与 AB 的斜率满足 $k_{OP} \cdot k_{AB} = -\frac{9}{25}$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

13. 已知平行四边形 $ABCD$ 中, 点 $A(1, 1), B(-2, 3), C(0, -4)$, 则点 D 的坐标为_____.
14. 已知圆心为 C 的圆经过点 $A(1, 1)$ 和 $B(2, -2)$, 且圆心 C 在直线 $l: x + y + 5 = 0$ 上, 则圆 C 的方程为_____.
15. 已知点 P 为椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 上的动点, EF 为圆 $N: x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 的任意一条直径, 则 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最大值是_____.
16. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 且 $b > c$, 若在椭圆上存在点 P , 使得过点 P 可作以 F_1F_2 为直径的圆的两条互相垂直的切线, 则椭圆离心率的范围为_____.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 72.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. (5 + 5) 已知直线 $l_1: 2x - y + 1 = 0$ 和 $l_2: x - y - 2 = 0$ 的交点为 P .

(1) 若直线 l 经过点 P 且与直线 $l_3: 4x - 3y - 5 = 0$ 平行，求直线 l 的方程；

(2) 若直线 m 经过点 P 且与 x 轴， y 轴分别交于 A ， B 两点， P 为线段 AB 的中点，求 $\triangle OAB$ 的面积.

18. (5 + 7) 已知圆 C 经过 $A(3,4)$ ， $P(3,6)$ ， $Q(5,6)$ 三点.

(1) 求圆 C 的方程；

(2) 过点 $(3,0)$ 的直线 l 截圆 C 所得弦长为 2，求直线 l 的方程.

19. (5+7) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，点 $P(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 若 $F_1(-1,0)$ ， $F_2(1,0)$ ，过 F_1 直线 l 交椭圆 C 于 M 、 N 两点，且直线 l 倾斜角为 45° ，求 $\triangle MF_2N$ 的面积.

20. (4 + 4 + 4) 已知圆 $M: x^2 + (y - 4)^2 = 4$ ，点 P 是直线 $l: x - 2y = 0$ 上的一动点，过点 P 作圆 M 的切线 PA ， PB ，切点分别为 A ， B .

(1) 当切线 PA 的长度为 $2\sqrt{3}$ 时，求点 P 的坐标.

(2) 若 $\triangle PAM$ 的外接圆为圆 N ，试问：当 P 在直线 l 上运动时，圆 N 是否过定点？若过定点，求出所有定点的坐标；若不过定点，请说明理由.

(3) 求线段 AB 长度的最小值.

21. (4+8) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$ 和 $F_2(c, 0)$, P 为椭圆 C 上任意一点,

三角形 PF_1F_2 面积的最大值是 3.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若过点 $(2, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 且 $Q(\frac{9}{4}, 0)$, 证明: $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 为定值.

22. (3+4+5) 生活中, 椭圆有很多光学性质, 如从椭圆的一个焦点出发的光线射到椭圆镜面后反射, 反射光线经过另一个焦点. 现椭圆 C 的焦点在 x 轴上, 中心在坐标原点, 从左焦点 F_1 射出的光线经过椭圆镜面反射到右焦点 F_2 , 这束光线的总长度为 4, 且椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 左顶点和上顶点分别为 A, B .

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 点 P 在椭圆上, 求线段 BP 的长度 $|BP|$ 的最大值及取最大值时点 P 的坐标;

(3) 不过点 A 的直线 l 交椭圆 C 于 M, N 两点, 记直线 l, AM, AN 的斜率分别为 k, k_1, k_2 , 若 $k(k_1 + k_2) = 1$ 证明: 直线 l 过定点, 并求出定点的坐标.

高二数学周练(5) 答案

1. 【答案】D

解: $\because$ 直线 l 的斜率 $-1 \leq k \leq \sqrt{3}$, $\therefore -1 \leq \tan \alpha \leq \sqrt{3}$, $\because \alpha \in [0, \pi)$, $\therefore \alpha \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$.

故选: D.

2. 【答案】A

解: 直线 $kx - y - k = 0$ 即 $k(x - 1) - y = 0$,

令 $x - 1 = 0$, $y = 0$, 解得 $x = 1$, $y = 0$, 因此直线经过定点 $Q(1, 0)$,

由分析得点 $P(-1, 2)$ 到直线 $kx - y - k = 0$ 的距离的最大值即为线段 PQ 的长,

$|PQ| = \sqrt{(1+1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$. 故答案选: A.

3. 【答案】B

解: 当 $m + 1 = 0$ 即 $m = -1$ 时, 两直线为 $2x + 4 = 0$, $-x + 3y - 2 = 0$, 两直线不平行, 不符合题意;

当 $m + 1 \neq 0$ 即 $m \neq -1$ 时, 直线 $2x + (m + 1)y + 4 = 0$ 的斜率为 $-\frac{2}{m+1}$,

直线 $mx + 3y - 2 = 0$ 的斜率为 $-\frac{m}{3}$, 因为两直线平行, 所以 $-\frac{2}{m+1} = -\frac{m}{3}$, 解得 $m = 2$ 或 -3 ,

故选 B.

4. 【答案】B

解: 把圆 $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ 转换为标准式 $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$,

则圆心 $(2, -2)$ 到直线 $x + y - 3\sqrt{2} = 0$ 的距离, $d = \frac{|2-2-3\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 3 > 1$,

所以直线和圆相离. 所以圆上的动点 P 到直线的距离的最大值为 $d_{\max} = 3 + 1 = 4$,

圆上的动点 P 到直线的距离的最小值为 $d_{\min} = 3 - 1 = 2$.

即 d 的取值范围是: $[2, 4]$. 故选: B.

5. 【答案】C

解: 椭圆 $x^2 + my^2 = 1$ 化为: $x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{m}} = 1$, $\because$ 椭圆的长轴长是短轴长的2倍,

$\therefore 1 = 4 \times \frac{1}{m}$, 或 $1 \times 4 = \frac{1}{m}$, 解得: $m = \frac{1}{4}$ 或 $m = 4$. 故选: C.

6. 【答案】B

解: 圆 $C_1: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ 的圆心为 $C_1(1, -1)$, 半径为1,

圆 $C_2: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$ 的圆心为 $C_2(4, 5)$, 半径为3.

$\therefore (|PN| - |PM|)_{\max} = |PN|_{\max} - |PM|_{\min}$,

又 $|PN|_{\max} = |PC_2| + 3$, $|PM|_{\min} = |PC_1| - 1 \therefore (|PN| - |PM|)_{\max} = (|PC_2| + 3) - (|PC_1| - 1) = |PC_2| - |PC_1| + 4$.

点 $C_2(4,5)$ 关于 x 轴的对称点为 $C_2'(4,-5)$,

$$|PC_2| - |PC_1| = |PC_2'| - |PC_1| \leq |C_1C_2'| = \sqrt{(4-1)^2 + (-5+1)^2} = 5,$$

所以, $(|PN| - |PM|)_{\max} = 5 + 4 = 9$. 故选 B.

7. 【答案】B

解: 依题意可知点 $F(-c, 0)$, 直线 AB 斜率为 $\frac{b-0}{0-a} = -\frac{b}{a}$, 直线 BF 的斜率为

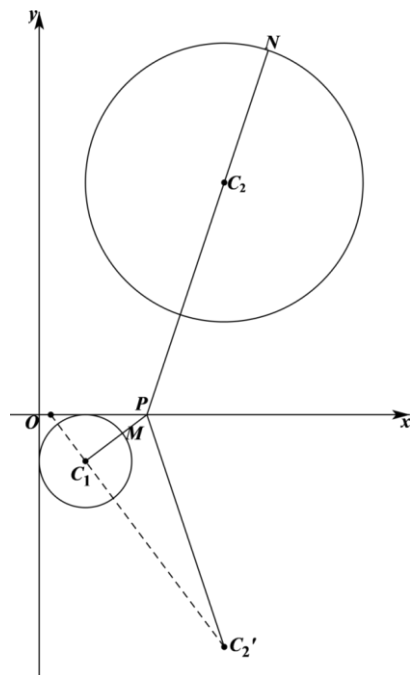
$$\frac{0-b}{-c-0} = \frac{b}{c}, \therefore \angle FBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \left(-\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{b}{c} = -\frac{b^2}{ac} = -\frac{a^2-c^2}{ac} = -1,$$

整理得 $c^2 + ac - a^2 = 0$, 即 $\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - 1 = 0$, 即 $e^2 + e - 1 = 0$,

$$\text{解得 } e = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ 或 } -\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

$\therefore 0 < e < 1$, $\therefore e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 故选 B.



8. 【答案】C

解: 设 $M(x, y)$, 则 $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|MT| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-m)^2}$,

$$|AB| = 2\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{x^2 + y^2})^2}, \therefore AB = 2MT,$$

$$\therefore 2\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{x^2 + y^2})^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-m)^2},$$

化简得, $x^2 + y^2 - 2x - my + \frac{m^2+1}{2} = 0$, 整理得 $(x-1)^2 + \left(y - \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{2-m^2}{4}$, $m^2 \leq 2$,

即为 M 点的轨迹方程, 由点 M 在圆 O 内部, 则 $\sqrt{1 + \frac{m^2}{4}} < \sqrt{3} - \sqrt{\frac{2-m^2}{4}}$,

化简整理可得 $(m^2 + 1)^2 > 0$, 所以只需 $m^2 \leq 2$. 解得 $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$. 故选 C.

9. 【答案】ABD

解: 过点 $A(1,3)$, $B(-3,7)$ 的直线的斜率为 $k = \frac{7-3}{-3-1} = -1$, 所以直线的倾斜角为 135° , 故 A 正确;

若直线 $2x + 3y + 6 = 0$ 与直线 $ax - y + 2 = 0$ 垂直, 则 $2a + 3 \times (-1) = 0$, 解得 $a = \frac{3}{2}$, 故 B 正确;

因为 $A(1,1)$ 关于 x 轴对称点 $A'(1,-1)$,

$$\text{则 } |PA| + |PB| = |PA'| + |PB| \geq |A'B| = \sqrt{(2-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{17},$$

当且仅当 A' , P , B 三点共线时等号成立, 故 $|PA| + |PB|$ 的最小值为 $\sqrt{17}$, 故 C 错误;

直线 $x + 2y - 4 = 0$ 与直线 $2x + 4y + 1 = 0$ ，即直线 $2x + 4y - 8 = 0$ 与直线 $2x + 4y + 1 = 0$ ，两直线平行，它们之间的距离为 $\frac{|-8-1|}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{10}$ ， D 正确。故选 ABD 。

10. 【答案】 ABD

解：由圆 $O_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 和圆 $O_2: x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ ，

两圆方程相减得：公共弦 AB 所在直线方程为 $x - y = 0$ ，故 A 正确；

由选项 A 可得：直线 AB 的方程为 $x - y = 0$ ，

所以 $O_2(-1,2)$ 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|-1-2|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，又圆 O_2 的半径为 $\sqrt{5}$ ，

所以圆 O_2 上到直线 AB 距离等于1的点有2个，故 B 正确；

可得圆心 $O_1(1,0)$ 到直线 $x - y = 0$ 的距离 $d = \frac{|1-0|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以 $|AB| = 2\sqrt{1^2 - d^2} = \sqrt{2}$ ，故 C 错误；

由选项 C 得：圆心 O_1 到直线 AB 的距离 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，圆 O_1 半径为1，

则 P 到直线 AB 距离的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ ，故 D 正确。故选 ABD 。

11. 【答案】 ACD

【解答】解： $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4$ 可以理解为到点 $(-1,0)$ 和点 $(1,0)$ 的距离之和为4的点 P 的轨迹，由椭圆定义知其轨迹为椭圆，且 $a = 2$ ， $c = 1$ ， $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$ ， P 点的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，

A 正确； $|PA| + |PF_1| = |PA| + (2a - |PF_2|) = 4 - (|PF_2| - |PA|)$ ，

当 P ， A ， F_2 ，三点共线时 $|PF_2| - |PA|$ 取得最小值为 $\frac{3}{2} - (\frac{3}{2} + 1) = -1$ ，

所以 $|PA| + |PF_1| \leq 5$ ， B 错误；

同理， $|PA| + |PF_2| = |PA| + (2a - |PF_1|) = 4 - (|PF_1| - |PA|)$

当 P ， A ， F_1 ，三点共线时 $|PF_1| - |PA|$ 取得最大值为 $|AF_1| = \sqrt{(1+1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$ ，

所以 $|PA| + |PF_2| \geq 4 - \sqrt{5} > 1$ ， D 正确；

对于 C 选项，设点 P 到直线 AF_1 的距离为 d_2 ，则 $S_{\triangle PAF_1} = \frac{1}{2}|AF_1| \cdot d_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}d_2 = \frac{3}{2}$ ，可得 $d_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ，

与直线 $AF_1: x + 2y - 1 = 0$ 平行且距离为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 的直线的方程为 $x + 2y + 2 = 0$ 或 $x + 2y - 4 = 0$ ，所以点 P 在直线 $x + 2y + 2 = 0$ 或 $x + 2y - 4 = 0$ 上，

直线 $x + 2y + 2 = 0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相交，直线 $x + 2y - 4 = 0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切，

故有且仅有3个点 P ，使得 $\triangle PAF_1$ 的面积为 $\frac{3}{2}$ ， C 正确。

12. 【答案】BC

解：因为椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ，所以 $a^2 = 25$ ， $b^2 = 9$ ，椭圆的焦点在 y 轴上，

所以 $c^2 = a^2 - b^2 = 16$ ，所以 $F_1(0, 4)$ ， $F_2(0, -4)$ ，

设直线 l 的方程为 $y - 4 = kx$ ，即 $y = kx + 4$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $P(x_0, y_0)$ ，

对于A：由上知椭圆的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ ，故A不正确；

对于B： $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = (-x_1, 4 - y_1) \cdot (-x_1, -4 - y_1)$

$= x_1^2 - (4 - y_1)(4 + y_1) = x_1^2 - 16 + y_1^2 = 0$ ，则 $x_1^2 + y_1^2 = 16$ ，所以A点到原点O的距离为4，

因为椭圆上到原点的距离的取值范围为 $[3, 5]$ ，故B正确；

对于C： $|AB| = |AF_1| + |BF_1| = 2a - |AF_2| + 2a - |BF_2|$

$= 4a - (|AF_2| + |BF_2|) = 4 \times 5 - 12 = 8$ ，故C正确；

对于D：因为点A，B在椭圆上，所以 $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{25} = 1$ ， $\frac{x_2^2}{9} + \frac{y_2^2}{25} = 1$ ，

两式相减得， $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{9} + \frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{25} = 0$ ，

所以 $\frac{1}{9} \cdot \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{1}{25} \cdot \frac{y_1+y_2}{2} \cdot \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = 0$ ，所以 $\frac{1}{9} \cdot x_0 + \frac{1}{25} \cdot y_0 \cdot k_{AB} = 0$ ，

所以 $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} \cdot \frac{y_0}{x_0} \cdot k_{AB} = 0$ ，所以 $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} \cdot k_{OP} \cdot k_{AB} = 0$ ，所以 $k_{OP} \cdot k_{AB} = -\frac{25}{9}$ ，故D不正确。

故选BC。

13. 【答案】(3, -6)

解：设点 $D(x, y)$ ，则 $k_{AB} = k_{CD}$ ， $k_{BC} = k_{AD}$ ，即 $\frac{3-1}{-2-1} = \frac{y+4}{x}$ ， $\frac{-4-3}{0+2} = \frac{y-1}{x-1}$ ，

解得 $x = 3$ ， $y = -6$ ，故答案为(3, -6)。

14. 【答案】 $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$

解：因为 $A(1, 1)$ ， $B(2, -2)$ ，所以线段AB的中点坐标为 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ ，直线AB的斜率 $k_{AB} = \frac{-2-1}{2-1} = -3$ ，

因此线段AB的垂直平分线方程是： $y + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})$ ，即 $x - 3y - 3 = 0$ 。

圆心C的坐标是方程组 $\begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \\ x + y + 5 = 0 \end{cases}$ 的解，解此方程组得： $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$ ，所以圆心C的坐标是(-3, -2)。

圆C的半径长 $r = |CA| = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2-1)^2} = 5$ ，

所以圆心为C的圆的标准方程是 $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$ 。

故答案为： $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$

15. 【答案】19

解：圆 $N: x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的圆心为 $N(0,1)$ ，半径长为 1，

设点 $P(x,y)$ ，由点 P 为椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 上的动点，可得： $x^2 = 16 - \frac{4}{3}y^2$ 且 $-2\sqrt{3} \leq y \leq 2\sqrt{3}$ ，

由 EF 为圆 $N: x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的任意一条直径可得：

$$\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NE}, \quad \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{NE},$$

$$\therefore \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NE}) \cdot (\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{NE}) = \overrightarrow{PN}^2 - \overrightarrow{NE}^2 = x^2 + (y-1)^2 - 1,$$

$$= 16 - \frac{4}{3}y^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = -\frac{1}{3}y^2 - 2y + 16 = -\frac{1}{3}(y+3)^2 + 19, \quad (-2\sqrt{3} \leq y \leq 2\sqrt{3}),$$

$\therefore$ 当 $y = -3$ 时， $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 取得最大值，即 $(\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF})_{\max} = 19$ 。故答案为：19。

16. 【答案】 $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

解：根据题目所给的条件可知，以 F_1F_2 为直径的圆存在两条相互垂直的切线；

因为两条切线均垂直于过切点的半径，且切线互相垂直，

则切线的交点 $P(x_0, y_0)$ 仍然构成以坐标原点为圆心，以 $\sqrt{2}c$ 为半径的一个圆，

设该圆的方程为 $x_0^2 + y_0^2 = 2c^2$ ，由题意得 $x_0^2 + y_0^2 \leq 2c^2$ 有解，即 $(x_0^2 + y_0^2)_{\min} \leq 2c^2$ ，

因为 $x_0^2 + y_0^2 = x_0^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_0^2 = \frac{c^2}{a^2}x_0^2 + b^2$ ，所以 $(x_0^2 + y_0^2)_{\min} = b^2 \leq 2c^2$

即 $a^2 - c^2 \leq 2c^2$ ，所以 $e^2 \geq \frac{1}{3}$ 又 $\because a^2 - c^2 > c^2, \therefore e^2 < \frac{1}{2}$ ，

故椭圆离心率 e 的取值范围是 $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq e < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。故答案为 $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 。

17. 解：(1) 由 $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ ，求得 $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases}$ ，可得直线 l_1 和 l_2 的交点为 $P(-3, -5)$ ，

由于直线 l_3 的斜率为 $\frac{4}{3}$ ，故过点 P 且与直线 l_3 平行的直线 l 的方程为 $y + 5 = \frac{4}{3}(x + 3)$ ，

即 $4x - 3y - 3 = 0$ ；

(2) 由题知：设直线 m 的斜率为 $k, k \neq 0$ ，则直线 m 的方程为 $y + 5 = k(x + 3)$ ，

故 $A(\frac{5}{k} - 3, 0)$ ， $B(0, 3k - 5)$ ，且 $\frac{\frac{5}{k} - 3}{2} = -3$ ， $\frac{3k - 5}{2} = -5$ ，

求得 $k = -\frac{5}{3}$ ，故 $A(-6, 0)$ 、 $B(0, -10)$ ，

故 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 = 30$ 。

18. 【答案】 解：(1) 由题意可知圆心 C 在 AP 的中垂线 $y = 5$ 上，也在 PQ 的中垂线 $x = 4$ 上，

$\therefore$ 圆心 $C(4, 5)$ ，半径 $r = \sqrt{2}$ ，

∴圆C的方程为 $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 2$.

(2)当直线l的斜率存在时, 设直线l的方程为 $y = k(x-3)$,

即 $kx - y - 3k = 0$, 由题意得 $d = \frac{|4k-5-3k|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$, 解得 $k = \frac{12}{5}$.

∴直线l的方程为 $12x - 5y - 36 = 0$;

当直线l的斜率不存在时, 直线l的方程为 $x = 3$, 此时弦长为2, 符合题意.

∴直线l的方程为 $x - 3 = 0$ 或 $12x - 5y - 36 = 0$.

19.【答案】解: (1)因为椭圆C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $a = \sqrt{2}c$, 又 $b^2 = a^2 - c^2 = c^2$, 点 $P(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 代入椭圆C得: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1$; 联立解得 $a = \sqrt{2}$, $c = 1$,

所以 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1$, 所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$;

(2)直线l的斜率 $k = \tan 45^\circ = 1$, 且过点 $F_1(-1, 0)$, 故直线l的方程为: $y = x + 1$,

与椭圆方程联立, 消去x得: $3y^2 - 2y - 1 = 0$, ∴ $y = 1$ 或 $y = -\frac{1}{3}$.

∴ $\triangle MF_2N$ 的面积为 $\frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{4}{3}$.

20.【答案】解: 由题意知, 圆M的半径 $r = 2$, $M(0, 4)$, 设 $P(2b, b)$.

(1) ∵ PA是圆M的一条切线, ∴ $\angle MAP = 90^\circ$,

∴ $|MP| = \sqrt{(0-2b)^2 + (4-b)^2} = \sqrt{|AM|^2 + |AP|^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$, 解得 $b = 0$ 或 $\frac{8}{5}$,

∴点P的坐标为 $(0, 0)$ 或 $(\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$.

(2) ∵ $\angle MAP = 90^\circ$, ∴ 经过A, P, M三点的圆N以MP为直径, 其方程为 $(x-b)^2 + (y - \frac{b+4}{2})^2 = \frac{4b^2 + (b-4)^2}{4}$,

即 $(2x + y - 4)b - (x^2 + y^2 - 4y) = 0$.

由 $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$, 解得 $x = 0$ 或 $x = \frac{8}{5}$. ∴圆N过定点 $(0, 4)$, $(\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$.

(3)由(2)得圆N的方程为 $(x-b)^2 + (y - \frac{b+4}{2})^2 = \frac{4b^2 + (b-4)^2}{4}$,

即 $x^2 + y^2 - 2bx - (b+4)y + 4b = 0$, ①

又圆M: $x^2 + (y-4)^2 = 4$, 即 $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$, ②

② - ①得, 圆M与圆N的相交弦AB所在直线的方程为 $2bx + (b-4)y + 12 - 4b = 0$,

$$\therefore \text{点}M\text{到直线}AB\text{的距离}d = \frac{4}{\sqrt{5b^2-8b+16}},$$

$$\therefore |AB| = 2\sqrt{4-b^2} = 4\sqrt{1-\frac{4}{5b^2-8b+16}} = 4\sqrt{1-\frac{4}{5(b-\frac{4}{5})^2+\frac{64}{5}}},$$

$\therefore$ 当 $b = \frac{4}{5}$ 时, $|AB|$ 有最小值 $\sqrt{11}$.

21. 【答案】解: (I)由题意知 $c^2 = 6 - b^2$,

当 P 点位于椭圆 C 短轴端点时, 三角形 PF_1F_2 的面积 S 取最大值, 此时 $S_{\max} = \frac{1}{2} \times 2c \times b = bc = 3$.

所以 $b^2c^2 = 9$, 即 $b^2(6 - b^2) = 9$, 解得 $b^2 = 3$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(II)当直线 l 的斜率不为0时, 设直线 $l: x = my + 2$ 交椭圆于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} x = my + 2 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$ 消去 x 得, $(m^2 + 2)y^2 + 4my - 2 = 0$.

$$\text{则 } y_1 + y_2 = -\frac{4m}{m^2+2}, y_1y_2 = -\frac{2}{m^2+2}.$$

$$\text{而 } \overrightarrow{QA} = (x_1 - \frac{9}{4}, y_1), \overrightarrow{QB} = (x_2 - \frac{9}{4}, y_2),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = (x_1 - \frac{9}{4})(x_2 - \frac{9}{4}) + y_1y_2 = (m^2 + 1)y_1y_2 - \frac{1}{4}m(y_1 + y_2) + \frac{1}{16}$$

$$= (m^2 + 1)(-\frac{2}{m^2+2}) - \frac{1}{4}m(-\frac{4m}{m^2+2}) + \frac{1}{16} = \frac{-m^2-2}{m^2+2} + \frac{1}{16} = -\frac{15}{16}.$$

当直线 l 的斜率为0时, $A(\sqrt{6}, 0), B(-\sqrt{6}, 0)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = (\sqrt{6} - \frac{9}{4}, 0) \cdot (-\sqrt{6} - \frac{9}{4}, 0) = -6 + \frac{81}{16} = -\frac{15}{16}.$$

故 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 为定值, 且为 $-\frac{15}{16}$.

22. 【答案】(1)解: 由题意可知 $a = 2$, 则 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{所以 } c = \sqrt{3}, \text{ 所以 } b = 1 \quad C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

(2)由(1)得椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 则 $B(0, 1)$, 设 $P(x, y)$, 则 $|BP| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$,

因为点 P 在椭圆上, 所以 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 则 $x^2 = 4 - 4y^2 (y \in [-1, 1])$,

$$\text{则 } |BP| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{-3y^2 - 2y + 5} = \sqrt{-3(y + \frac{1}{3})^2 + \frac{16}{3}},$$

所以当 $y = -\frac{1}{3}$ 时, $|BP|_{\max} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

此时 $x = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}$, 所以 $P(\pm \frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$;

(3)证明: $A(-2,0)$,

设直线 l 的方程为 $y = kx + m$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{消} y \text{得} (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{则} x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1+4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4m^2-4}{1+4k^2},$$

$$\text{则} k_1 + k_2 = \frac{y_1}{x_1+2} + \frac{y_2}{x_2+2} = \frac{kx_1+m}{x_1+2} + \frac{kx_2+m}{x_2+2} = \frac{(kx_1+m)(x_2+2) + (kx_2+m)(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$$

因为 $k(k_1 + k_2) = 1$,

$$\text{则} k \cdot \frac{(kx_1+m)(x_2+2) + (kx_2+m)(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)} = 1,$$

$$\text{即} 2k^2x_1x_2 + (2k + m)(x_1 + x_2) + 4mk = x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4,$$

$$\text{即} (2k^2 - 1)x_1x_2 + (2k + m - 2)(x_1 + x_2) + 4mk - 4 = 0,$$

$$\text{即} (2k^2 - 1) \cdot \frac{4m^2-4}{1+4k^2} + (2k + m - 2) \frac{-8km}{1+4k^2} + 4mk - 4 = 0,$$

$$\text{即} (2k^2 - 1)(4m^2 - 4) + (2k + m - 2)(8km) + (4mk - 4)(1 + 4k^2) = 0,$$

$$\text{化简得} 6k^2 - 5km + m^2 = 0,$$

$$\text{解得} m = 2k \text{ 或 } m = 3k,$$

$m = 2k$ 时 $y = k(x + 2)$ 过点 A , 舍去

所以 $m = 3k$,

所以直线 l 得方程为 $y = kx + 3k = k(x + 3)$,

所以直线 l 过定点 $(-3,0)$