

江苏省仪征中学 2023-2024 学年度第一学期高二数学周练 6

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 已知直线 $x + ay - 1 = 0$ 与直线 $(a - 1)x + ay + 1 = 0$ 平行，则实数 a 的值是 ()

- A. 2 或 0 B. 2 C. 0 D. -2

2. 若点 $P(1, -1)$ 在圆 $C: x^2 + y^2 - x + y + m = 0$ 的外部，则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $m > 0$ B. $0 < m < \frac{1}{2}$ C. $m < \frac{1}{2}$ D. $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$

3. 圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 关于直线 $x + y - 1 = 0$ 对称的圆的方程是 ()

- A. $(x - 3)^2 + y^2 = 16$ B. $x^2 + (y - 3)^2 = 9$
C. $x^2 + (y - 3)^2 = 16$ D. $(x - 3)^2 + y^2 = 9$

4. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点，点 M 在 C 上，则 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的最大值为 ()

- A. 13 B. 12 C. 9 D. 6

5. 设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ， $P(a, 2)$ 为抛物线上一点，若 $|PF| = 2$ ，则 $p =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{5}{2}$

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的左焦点是 F_1 ，右焦点是 F_2 ，点 P 在椭圆上，如果线段 PF_1 的中点在 y 轴上，那么 $|PF_2| : |PF_1| =$ ()

- A. 3: 5 B. 3: 4 C. 4: 3 D. 5: 3

7. 若曲线 C 上存在点 M ，使 M 到平面内两点 $A(-5, 0)$ ， $B(5, 0)$ 距离之差的绝对值为 8，则称曲线 C 为“好曲线”。以下曲线不是“好曲线”的是 ()

- A. $x + y = 5$ B. $x^2 + y^2 = 9$ C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ D. $x^2 = 16y$

8. 已知点 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过 F_1 作斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 与双曲线的左、右两支分别交于 M, N 两点，且 $|F_2N| = |F_2M|$ ，则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ D. $\sqrt{6}$

二、多选题（本大题共 4 小题，共 20.0 分。在每小题有多项符合题目要求）

9. 下列说法正确的是 ()

- A. 过点 $P(1, 2)$ 且在 x, y 轴截距相等的直线方程为 $x + y - 3 = 0$
B. 直线 $y = 3x - 2$ 在 y 轴上的截距为 -2

C. 直线 $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$ 的倾斜角为 60°

D. 过点 $(-1, 2)$ 且垂直于直线 $x - 2y + 3 = 0$ 的直线方程为 $2x + y = 0$

10. 已知直线 $l: y = kx + 2k + 2 (k \in R)$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$. 则下列说法正确的是 ()

A. 直线 l 过定点 $(-2, 2)$

B. 直线 l 与圆 C 相离

C. 圆心 C 到直线 l 距离的最大值是 $2\sqrt{2}$

D. 直线 l 被圆 C 截得的弦长最小值为 4

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F, E , 直线 $x = m (-1 < m < 1)$ 与椭圆相交于点 A, B , 则 ()

A. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 存在 m , 使 $\triangle FAB$ 为直角三角形

C. 存在 m , 使 $\triangle FAB$ 的周长最大

D. 当 $m = 0$ 时, 四边形 $FBEA$ 面积最大

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 有公共焦点, C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 且经过点 $T(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$, 则下列说法正确的是 ()

A. 双曲线 C 的标准方程为 $x^2 - y^2 = 1$

B. 若直线 $y = \lambda x$ 与双曲线 C 无交点, 则 $|\lambda| > 1$

C. 设 $A(\sqrt{2}, 1)$, 过点 $B(0, 1)$ 的动直线与双曲线 C 交于 P, Q 两点 (异于点 A), 若直线 AP 与直线 AQ 的斜率存在, 且分别记为 k_1, k_2 , 则 $k_1 + k_2 = \sqrt{2}$

D. 若动直线 l 与双曲线 C 恰有 1 个公共点, 且与双曲线 C 的两条渐近线分别交于点 M, N , 则 $\triangle OMN$ (O 为坐标原点) 的面积为定值 1

三、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

13. 已知点 $A(-1, 2), B(1, 4)$, 若直线 l 过点 $M(-2, -3)$, 且 A, B 到直线 l 的距离相等, 则直线 l 的一般式方程为_____.

14. 圆 $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 2$ 上的点到直线 $x + y + 5 = 0$ 的距离的最大值为_____.

15. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 若椭圆 C 上存在点 P , 使得线段 PF_1 的中垂线恰好经过焦点 F_2 , 则椭圆 C 离心率的取值范围为_____.

16. 设 e_1, e_2 分别为具有公共焦点 F_1, F_2 的椭圆和双曲线的离心率, P 是两曲线的一个公共点, 且满足 $|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| = |\overrightarrow{F_1F_2}|$, 则 $\frac{e_1 e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}$ 的值为_____.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70.0 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (5+5) 在 $\triangle ABC$ 中, $A(2,5)$, $B(1,3)$

(1) 求 AB 边的垂直平分线所在的直线方程;

(2) 若 $\angle BAC$ 的角平分线所在的直线方程为 $x - y + 3 = 0$, 求 AC 所在直线的方程.

18. (5+7) 已知圆 M (M 为圆心) 的方程为 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$, 直线 l 的方程为 $x - 2y = 0$, 点 P 在直线 l 上, 过 P 点作圆 M 的切线 PA 、 PB , 切点为 A 、 B .

(1) 若 $\angle APB = 60^\circ$, 试求点 P 的坐标;

(2) 求证: 经过 A 、 P 、 M 三点的圆必过定点, 并求出所有定点的坐标.

19. (5+7) 已知点 A , B 的坐标分别是 $(-1,0)$, $(1,0)$. 直线 AM , BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积为 -2 .

(1) 求动点 M 的轨迹方程;

(2) 若过点 $N(\frac{1}{2}, 1)$ 的直线 l 交动点 M 的轨迹于 C , D 两点, 且 N 为线段 CD 的中点, 求直线 l 的方程.

20. (5+7) 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

(1) 过 $P(-1,0)$ 的直线 l_1 与双曲线有且只有一个公共点, 求直线 l_1 的斜率;

(2) 若直线 $l_2: y = kx + m$ 与双曲线相交于 A , B 两点 (A, B 均异于左、右顶点), 且以线段 AB 为直径的圆过双曲线的左顶点 C , 求证: 直线 l_2 过定点.

21. (5+7) 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 经过点 $M(2, -3)$ 和 $N\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, O 为坐标原点.

(1) 求双曲线的方程;

(2) 是否存在圆心在原点的圆, 使其一条切线经过双曲线的左焦点, 并且与双曲线交于 A, B 两点, 使得 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, 若存在, 求出圆和切线的方程; 若不存在, 说明理由.

22. (4+8) 已知中心在原点, 焦点为 $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$ 的椭圆经过点 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

(1) 求椭圆方程;

(2) 若 M 是椭圆上任意一点, MF_1 交椭圆于点 A , MF_2 交椭圆于点 B , 求 $\frac{|MF_1|}{|F_1A|} + \frac{|MF_2|}{|F_2B|}$ 的值.

高二数学周练 6 答案

1. 【答案】B

解：当 $a = 0$ 时，两直线都为 $x = 1$ ，重合，故舍去；当 $a \neq 0$ 时，由两直线平行，得到 $-\frac{1}{a} = -\frac{a-1}{a}$ ，解得 $a = 2$ ，经检验，两直线不重合，成立，综上，实数 a 的值是2. 故选 B.

2. 【答案】B

解：由题意可得： $\begin{cases} 1^2 + (-1)^2 - 1 - 1 + m > 0 \\ (-1)^2 + 1^2 - 4m > 0 \end{cases}$ ，解得： $0 < m < \frac{1}{2}$. 故选 B.

3. 【答案】D

解：圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 的圆心坐标为 $(1, -2)$ ，半径为3.

设点 $(1, -2)$ 关于直线 $x + y - 1 = 0$ 的对称点为 (m, n) ，

$$\text{则} \begin{cases} \frac{n+2}{m-1} = 1 \\ \frac{m+1}{2} + \frac{n-2}{2} - 1 = 0 \end{cases}, \text{解之得} \begin{cases} m = 3 \\ n = 0 \end{cases},$$

则圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 关于直线 $x + y - 1 = 0$ 对称的圆的圆心坐标为 $(3, 0)$ ，

则该圆的方程为 $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ ，故选 D.

4. 【答案】C

解：根据椭圆定义，得 $|MF_1| + |MF_2| = 2a$

所以 $|MF_1| \cdot |MF_2| = |MF_1| \cdot (2a - |MF_1|) = |MF_1| \cdot (6 - |MF_1|)$ ，

又因为 $3 - \sqrt{5} \leq |MF_1| \leq 3 + \sqrt{5}$. 所以当 $|MF_1| = 3$ 时， $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 有最大值9. 故选 C.

5. 【答案】C

解：因为 $|PF| = 2$ ，根据抛物线定义 $|PF| = a + \frac{p}{2} = 2$ ，又 $4 = 2pa$ ，可得 $a = 1, p = 2$. 故选：C.

6. 【答案】A

解： $\because O$ 是 F_1F_2 的中点， $\therefore PF_2$ 平行 y 轴，即 PF_2 垂直于 x 轴， $\because c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$ ， $\therefore |F_1F_2| = 4$ ，

设 $|PF_1| = t$ ，根据椭圆定义可知 $|PF_2| = 8 - t$ ， $\therefore (8 - t)^2 + 16 = t^2$ ，解得： $t = 5$ ，

$\therefore |PF_2| = 3$ ， $|PF_1| = 5$ ， $\therefore |PF_2| : |PF_1| = 3 : 5$. 故选：A.

7. 【答案】B

解： $\because M$ 到平面内两点 $A(-5, 0)$ ， $B(5, 0)$ 距离之差的绝对值为8，

$\therefore M$ 的轨迹是以 $A(-5, 0)$ ， $B(5, 0)$ 为焦点的双曲线，方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

A项，直线 $x + y = 5$ 过点 $(5, 0)$ ，故直线与 M 的轨迹有交点，选项A是“好曲线”；

B项, $x^2 + y^2 = 9$ 的圆心为(0,0), 半径为3, 与M的轨迹没有交点, 选项B不是“好曲线”;

C项, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的右顶点为(5,0), 故椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与M的轨迹有交点, 选项C是好曲线;

D项, 方程 $x^2 = 16y$ 代入 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, 可得 $y - \frac{y^2}{9} = 1$, 即 $y^2 - 9y + 9 = 0$, $\therefore \Delta > 0$, 故 $x^2 = 16y$ 与M的轨迹有交点, 选项D是“好曲线”. 故选B.

8. 【答案】B

解: 取MN中点A, 连 AF_2 , 令 $|MF_2| = |NF_2| = m$, 则 $AF_2 \perp MN$, 如图,

因点M, N为双曲线左右两支上的点, 由双曲线定义得

$$|MF_1| = |MF_2| - 2a = m - 2a, \quad |NF_1| = |NF_2| + 2a = m + 2a,$$

则 $|MN| = |NF_1| - |MF_1| = 4a, |MA| = 2a$, 令双曲线半焦距为c,

$Rt \triangle AF_1F_2$ 中, $|AF_1| = m, |AF_2| = \sqrt{4c^2 - m^2}$, $Rt \triangle AMF_2$ 中, $|AF_2| = \sqrt{m^2 - 4a^2}$,

则有 $\sqrt{m^2 - 4a^2} = \sqrt{4c^2 - m^2}$, 即 $m^2 = 2a^2 + 2c^2$,

因直线l的斜率为 $\frac{1}{2}$, 即 $\tan \angle AF_1F_2 = \frac{1}{2}$, 而 $\tan \angle AF_1F_2 = \frac{|AF_2|}{|AF_1|}$, 即 $\frac{|AF_2|}{|AF_1|} = \frac{1}{2}$,

于是有 $\frac{2c^2 - 2a^2}{2c^2 + 2a^2} = \frac{1}{4}$, 解得 $c^2 = \frac{5}{3}a^2$, 因此 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{3}$, 所以双曲线C的离心率为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$. 故选: B.

9. 【答案】BD

解: A.过点P(1,2)且在x、y轴截距相等的直线方程为 $x + y - 3 = 0$ 或 $y = 2x$, 故A错误;

B.直线 $y = 3x - 2$ 在y轴上的截距为-2, 故B正确;

C.直线 $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$ 的斜率为 $-\sqrt{3}$, 倾斜角 θ 满足 $\tan \theta = -\sqrt{3}$, $\theta \in [0, \pi)$, 即 $\theta = 120^\circ$, C错误;

D.垂直于直线 $x - 2y + 3 = 0$ 的直线方程为 $-2x - y + m = 0$, 把点(-1,2)代入得 $2 - 2 + m = 0$, $m = 0$,

故所求直线方程为 $-2x - y = 0$, 即 $2x + y = 0$, D正确; 故选: BD.

10. 【答案】AD

解: 对于A, 直线l: $y = kx + 2k + 2 (k \in R)$, 即 $y = k(x + 2) + 2$,

令 $x + 2 = 0$, 即 $x = -2$, 得 $y = 2$, 所以直线l过定点(-2,2), 故A正确;

对于B, 因为 $(-2)^2 + 2^2 - 2 \times 2 - 8 < 0$,

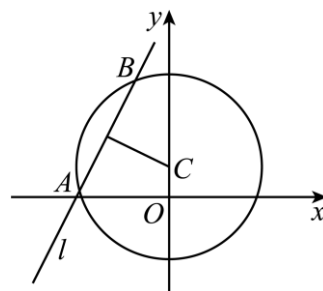
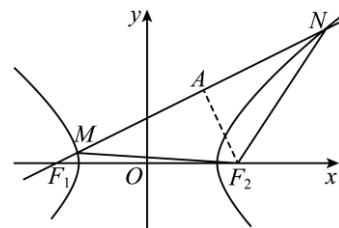
所以定点(-2,2)在圆C: $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ 内部, 所以直线l与圆C相交, 故B错误;

对于C, 因为圆C: $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$, 可化为 $x^2 + (y - 1)^2 = 9$, 圆心C(0,1),

当圆心C与定点(-2,2)的连线垂直于直线l时, 圆心C到直线l距离取得最大值,

此时其值为 $\sqrt{(-2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5}$, 故C错误;

对于D, 当圆心C到直线l距离最大时, 弦长取得最小值,



所以直线 l 被圆 C 截得的弦长的最小值为 $2 \times \sqrt{9-5} = 4$, 故 D 正确. 故选:

AD .

11. 【答案】BD

解: 如图所示: 对于 A , 由椭圆方程可得, $a = 2, b = \sqrt{3}$, 则 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$,

椭圆 C 的离心率为 $e = \frac{1}{2}$, 故 A 错误;

对于 B , 当 $m = 0$ 时, 可以得出 $\angle AFE = \frac{\pi}{3}$,

若取 $m = 1$ 时, 得 $\tan \angle AFE = \frac{3}{4} < 1 = \tan \frac{\pi}{4}$,

根据椭圆的对称性, 存在 $m \in (-1, 1)$ 使 $\triangle FAB$ 为直角三角形, 故 B 正确;

对于 C , 由椭圆的定义得, $\triangle FAB$ 的周长 $= |AB| + |AF| + |BF|$

$$= |AB| + (2a - |AE|) + (2a - |BE|) = 4a + |AB| - |AE| - |BE|,$$

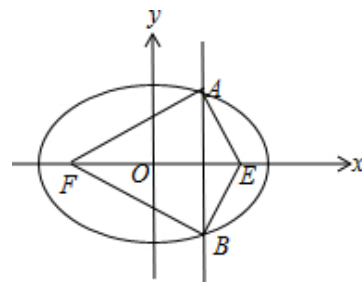
$\because |AE| + |BE| \geq |AB|$, $\therefore |AB| - |AE| - |BE| \leq 0$, 当 AB 过点 E 时取等号,

$\therefore |AB| + |AF| + |BF| = 4a + |AB| - |AE| - |BE| \leq 4a$, 即直线 $x = m$ 过椭圆的右焦点 E 时, $\triangle FAB$ 的周长最大,

此时直线 AB 的方程为 $x = 1$, 但是 $-1 < m < 1$, $\therefore$ 不存在 m , 使 $\triangle FAB$ 的周长最大, 故 C 错误;

对于 D , $|FE|$ 一定, 根据椭圆的对称性可知, 当 $m = 0$ 时, $|AB|$ 最大, 四边形 $FBEA$ 面积最大, 故 D 正确.

故选: BD .



12. 【答案】ACD

【解答】解: 对于 A 选项, 由题意 $a^2 + b^2 = 4 - 2 = 2$, 且 $\frac{5}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$, 解得 $a = b = 1$,

所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2 - y^2 = 1$, 故 A 正确;

对于 B 选项, 因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm x$,

所以直线 $y = \lambda x$ 与双曲线 C 无交点, 则 $|\lambda| \geq 1$, 故 B 错误;

对于 C 选项, 过点 B 的动直线斜率存在且不为 0, 故设该动直线为 $y = tx + 1 (t \neq 0)$.

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y = tx + 1 \end{cases}$ 得 $(1 - t^2)x^2 - 2tx - 2 = 0$,

所以 $\begin{cases} 1 - t^2 \neq 0 \\ \Delta = 4t^2 + 8(1 - t^2) > 0 \end{cases}$, 解得 $t^2 < 2$ 且 $t^2 \neq 1$ 且 $t \neq 0$, $x_1 + x_2 = \frac{2t}{1 - t^2}$, $x_1 x_2 = \frac{-2}{1 - t^2}$, 则 $k_1 + k_2 =$

$$\frac{y_1 - 1}{x_1 - \sqrt{2}} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - \sqrt{2}} = \frac{tx_1}{x_1 - \sqrt{2}} + \frac{tx_2}{x_2 - \sqrt{2}} = \frac{2tx_1 x_2 - \sqrt{2}t(x_1 + x_2)}{x_1 x_2 - \sqrt{2}(x_1 + x_2) + 2} = \frac{\frac{-4t}{1 - t^2} - \frac{2\sqrt{2}t^2}{1 - t^2}}{\frac{-2}{1 - t^2} - \frac{2\sqrt{2}t}{1 - t^2} + 2} = \frac{-4t - 2\sqrt{2}t^2}{-2\sqrt{2}t - 2t^2} = \sqrt{2}, \text{ 故 } C \text{ 正确;}$$

对于选项 D , 由于动直线 l 与双曲线 C 恰有 1 个公共点,

且与双曲线 C 的两条渐近线分别交于点 M, N ,

当直线 l 的斜率不存在时, $l: x = \pm 1$, $|MN| = 2$, $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$;

当动直线 l 的斜率存在时, 且斜率 $k \neq \pm 1$ 时, 不妨设直线 $l: y = kx + m (m \neq 0)$,

故由 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 - k^2)x^2 - 2mkx - m^2 - 1 = 0$, 从而 $\Delta = (-2mk)^2 - 4(1 - k^2)(-m^2 - 1) = 0$,

化简得 $k^2 = m^2 + 1$, 又因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm x$,

故由 $\begin{cases} y = kx + m \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{m}{1-k} \\ y = \frac{m}{1-k} \end{cases}$, 从而点 $M(\frac{m}{1-k}, \frac{m}{1-k})$. 同理可得, $N(-\frac{m}{1+k}, \frac{m}{1+k})$,

所以 $|MN| = \sqrt{(\frac{m}{1-k} + \frac{m}{1+k})^2 + (\frac{m}{1-k} - \frac{m}{1+k})^2} = \frac{2|m|\sqrt{k^2+1}}{|1-k^2|}$, 又因为原点 O 到直线 $l: kx - y + m = 0$ 的距离

$d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$, 所以 $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2}|MN|d = \frac{m^2}{|1-k^2|}$,

又由 $k^2 = m^2 + 1$, 所以 $S_{\triangle OMN} = \frac{m^2}{|1-k^2|} = 1$, 故 $\triangle OMN$ 的面积为定值1, 故 D 正确. 故选: ACD .

三、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

13. 【答案】 $x - y - 1 = 0$ 或 $3x - y + 3 = 0$

解: 由题知, 使过点 $M(-2, -3)$ 的直线 l 到点 $A(-1, 2)$, $B(1, 4)$ 的距离相等, 则直线 l 与直线 AB 平行或直线 l 过线段 AB 的中点.

①当直线 l 与直线 AB 平行时,

则直线 l 的斜率等于直线 AB 的斜率即 $\frac{4-2}{1-(-1)} = 1$. 故直线 l 的方程为 $y + 3 = x + 2$ 即 $x - y - 1 = 0$;

②当直线 l 过线段 AB 的中点时,

由中点坐标公式得 AB 的中点坐标为 $(\frac{-1+1}{2}, \frac{2+4}{2})$ 即 $(0, 3)$, 故直线 l 的方程为 $\frac{x-(-2)}{0-(-2)} = \frac{y-(-3)}{3-(-3)}$ 即 $3x - y + 3 = 0$.

故直线 l 的一般式方程为 $x - y - 1 = 0$ 或 $3x - y + 3 = 0$.

14. 【答案】 $3\sqrt{2}$

解: 圆 $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 2$ 的圆心 $C(2, -3)$, 半径为 $\sqrt{2}$, 圆心 $C(2, -3)$ 到直线的距离 $d = \frac{|2-3+5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$,

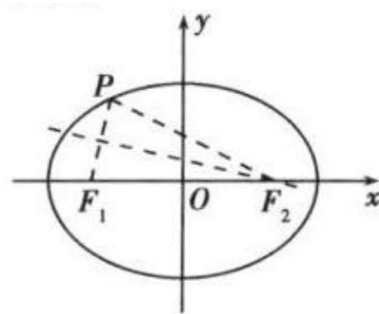
所以圆 $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 2$ 上的点到直线 $x + y + 5 = 0$ 的距离的最大值为:

$d + r = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. 故答案为 $3\sqrt{2}$.

15. 【答案】 $\frac{1}{3} \leq e < 1$

解: 如图, $\because$ 线段 PF_1 的中垂线经过 F_2 , $\therefore |PF_2| = |F_1F_2| = 2c$,

即在椭圆 C 上存在一点 P , 使得 $|PF_2| = 2c$,



$$\therefore |PF_2|_{\min} \leq 2c, \text{ 即 } a - c \leq 2c, \text{ 即 } a \leq 3c, \therefore \frac{c}{a} \geq \frac{1}{3}, \text{ 即 } e \geq \frac{1}{3},$$

又 $e < 1$, $\therefore$ 椭圆 C 离心率的取值范围是 $\frac{1}{3} \leq e < 1$.

16. 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解: 设椭圆的长半轴是 a_1 , 双曲线的实半轴是 a_2 , 它们的半焦距都是 c . 并设 $|PF_1| = m$, $|PF_2| = n$, $m > n$,

根据椭圆的定义和双曲线的定义可得: $m + n = 2a_1$, $m - n = 2a_2$, 解得 $m = a_1 + a_2$, $n = a_1 - a_2$.

$$\therefore |\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| = |\overrightarrow{F_1F_2}|, \text{ 即 } 2|PO| = 2|OF_2|, \text{ 故 } \triangle PF_1F_2 \text{ 为直角三角形, } \therefore PF_1 \perp PF_2,$$

$$\text{由勾股定理得: } |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2, \text{ 可得 } (a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 = (2c)^2,$$

$$\text{化简可得: } a_1^2 + a_2^2 = 2c^2, \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 2, \therefore \frac{e_1 e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故答案为 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

17. 【答案】 解: (1) 设 AB 边的垂直平分线为 l ,

$$\text{由题意可得 } k_{AB} = \frac{5-3}{2-1} = 2, \text{ 则 } k_l = -\frac{1}{2},$$

$$\text{又 } AB \text{ 的中点为 } (\frac{3}{2}, 4),$$

$$\text{所以 } l \text{ 的方程为 } y - 4 = -\frac{1}{2}(x - \frac{3}{2}),$$

$$\text{则 } AB \text{ 边的垂直平分线所在的直线方程为 } y = -\frac{1}{2}x + \frac{19}{4};$$

(2) 设点 B 关于直线 $x - y + 3 = 0$ 的对称点 M 的坐标为 (a, b) ,

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{b-3}{a-1} = -1 \\ \frac{1+a}{2} - \frac{3+b}{2} + 3 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a = 0, b = 4,$$

$$\text{则 } M(0, 4),$$

由题意可知点 A , M 都在直线 AC 上,

$$\text{所以 } k_{AC} = \frac{5-4}{2-0} = \frac{1}{2},$$

$$\text{则直线 } AC \text{ 的方程为 } y - 4 = \frac{1}{2}(x - 0), \text{ 即 } x - 2y + 8 = 0.$$

18. 【答案】 解: (1) 设 $P(2m, m)$, 由题可知 $MP = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$,

$$\text{即 } (2m)^2 + (m - 2)^2 = 4,$$

$$\text{解得: } m = 0, m = \frac{4}{5},$$

$$\text{故所求点 } P \text{ 的坐标为 } P(0, 0) \text{ 或 } P(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}).$$

(2) 设 $P(2m, m)$, MP 的中点 $Q(m, \frac{m}{2} + 1)$,

因为 PA 是圆 M 的切线,

所以经过 A, P, M 三点的圆是以 Q 为圆心, 以 MQ 为半径的圆,

故其方程为: $(x - m)^2 + (y - \frac{m}{2} - 1)^2 = m^2 + (\frac{m}{2} - 1)^2$,

化简得: $x^2 + y^2 - 2y - m(2x + y - 2) = 0$, 此式是关于 m 的恒等式,

$$\text{故} \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

所以圆过的定点为 $(0, 2)$ 和 $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$.

19. 【答案】解: (1) 设 $M(x, y)$. 因为 $k_{AM} \cdot k_{BM} = -2$, 所以 $\frac{y}{x+1} \cdot \frac{y}{x-1} = -2 (x \neq \pm 1)$, 化简得 $2x^2 + y^2 = 2 (x \neq \pm 1)$, 即为动点 M 的轨迹方程.

(2) 设 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$. 当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = \frac{1}{2}$,

则可设 $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}), D(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$, 此时线段 CD 的中点不是点 N , 不符合题意.

当直线 l 的斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y - 1 = k(x - \frac{1}{2})$.

$$\text{将 } C(x_1, y_1), D(x_2, y_2) \text{ 代入 } 2x^2 + y^2 = 2 (x \neq \pm 1), \text{ 得} \begin{cases} 2x_1^2 + y_1^2 = 2, & \textcircled{1} \\ 2x_2^2 + y_2^2 = 2. & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 整理得 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{2(x_1 + x_2)}{y_1 + y_2} = -\frac{2 \times 1}{2} = -1, \text{ 所以 } k = -1,$$

所以直线 l 的方程为 $y - 1 = -(x - \frac{1}{2})$, 即 $2x + 2y - 3 = 0$.

20. 【答案】解: (1) 由题意得直线 l_1 的斜率必存在, 设 $l_1: y = k_1(x + 1)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k_1(x + 1) \\ \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \end{cases}, \text{得 } (1 - 4k_1^2)x^2 - 8k_1^2x - 4k_1^2 - 4 = 0$$

若 $1 - 4k_1^2 = 0$, 即 $k_1 = \pm \frac{1}{2}$ 时, 满足题意;

若 $1 - 4k_1^2 \neq 0$, 即 $k_1 \neq \pm \frac{1}{2}$ 时,

$$\text{令 } \Delta = (-8k_1^2)^2 - 4(1 - 4k_1^2)(-4k_1^2 - 4) = 0, \text{ 解之得 } k_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3};$$

综上, l_1 的斜率为 $-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}$;

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \end{cases}$, 得 $(1 - 4k^2)x^2 - 8mkx - 4(m^2 + 1) = 0$, 则

$$\begin{cases} 1 - 4k^2 \neq 0 \\ \Delta = 64m^2k^2 + 16(1 - 4k^2)(m^2 + 1) > 0 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{8mk}{1 - 4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{-4(m^2 + 1)}{1 - 4k^2},$$

$$\therefore y_1y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2x_1x_2 + mk(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{m^2 - 4k^2}{1 - 4k^2}.$$

$\therefore$ 以 AB 为直径的圆过双曲线的左顶点 $C(-2, 0)$, $\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$,

$$\therefore y_1y_2 + x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = 0, \therefore \frac{m^2 - 4k^2}{1 - 4k^2} + \frac{-4(m^2 + 1)}{1 - 4k^2} + \frac{16mk}{1 - 4k^2} + 4 = 0,$$

$$\therefore 3m^2 - 16mk + 20k^2 = 0, \text{ 解得 } m = 2k \text{ 或 } m = \frac{10}{3}k.$$

当 $m = 2k$ 时, 直线 l 的方程为 $y = k(x + 2)$, 直线 l 过定点 $(-2, 0)$, 与已知矛盾;

当 $m = \frac{10}{3}k$ 时, 直线 l 的方程为 $y = k(x + \frac{10}{3})$, 直线 l 过定点 $(-\frac{10}{3}, 0)$, 经检验符合题意.

$\therefore$ 直线 l 过定点, 定点坐标为 $(-\frac{10}{3}, 0)$.

21. 【答案】解: (1) 因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 经过点 $M(2, -3)$ 和 $N(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \\ \frac{5}{4a^2} - \frac{3}{4b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 3 \end{cases}$$

所以双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由(1)可得双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 则左焦点为 $(-2, 0)$,

假设存在满足条件的圆,

因为圆的切线经过此左焦点, 所以可设圆的切线方程为 $x = my - 2$,

圆的方程为 $x^2 + y^2 = r^2$.

此时圆心到切线的距离 $d = \frac{|2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r$, 即 $r^2(m^2 + 1) = 4$.

设直线与双曲线的交点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = my - 2 \end{cases} \text{ 得 } (3m^2 - 1)y^2 - 12my + 9 = 0, \text{ 显然 } \Delta > 0,$$

$$\text{有 } y_1 + y_2 = \frac{12m}{3m^2 - 1}, \quad y_1 \cdot y_2 = \frac{9}{3m^2 - 1}.$$

$$x_1 \cdot x_2 = (my_1 - 2) \cdot (my_2 - 2) = m^2 y_1 y_2 - 2m(y_1 + y_2) + 4 = \frac{-3m^2 - 4}{3m^2 - 1}.$$

因为 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, 所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

$$\text{所以 } x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0, \text{ 即 } \frac{-3m^2 - 4}{3m^2 - 1} + \frac{9}{3m^2 - 1} = 0,$$

$$\text{得 } 3m^2 = 5, m = \pm \frac{\sqrt{15}}{3},$$

$$\text{因为 } r^2(m^2 + 1) = 4, \text{ 所以 } r = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

所以存在满足条件的圆且圆的方程为 $x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$,

$$\text{切线方程为 } 3x - \sqrt{15}y + 6 = 0 \text{ 或 } 3x + \sqrt{15}y + 6 = 0.$$

22. 【答案】解: (1) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

$$\text{由椭圆定义知: } 2a = \sqrt{\left(\frac{5}{2} + 2\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = 2\sqrt{10}, \text{ 即 } a = \sqrt{10}, \text{ 又 } c = 2,$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 6, \text{ 故椭圆方程为 } \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1.$$

(2) 由题意设 $AM: x = m_1 y - 2, BM: x = m_2 y + 2$,

再设 $M(x_0, y_0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = m_1 y - 2 \\ \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (3m_1^2 + 5)y^2 - 12m_1 y - 18 = 0.$$

$$\therefore y_0 y_1 = \frac{-18}{3m_1^2 + 5}, \text{ 得 } \frac{1}{y_1} = \frac{3m_1^2 + 5}{-18} y_0,$$

$$\text{同理 } y_0 y_2 = \frac{-18}{3m_2^2 + 5}, \text{ 得 } \frac{1}{y_2} = \frac{3m_2^2 + 5}{-18} y_0.$$

不妨设 M 在 x 轴上方, 则 $y_1 < 0, y_2 < 0$,

$$\therefore \frac{|MF_1|}{|F_1 A|} = \frac{y_0}{-y_1}, \frac{|MF_2|}{|F_2 B|} = \frac{y_0}{-y_2}, \therefore \frac{|MF_1|}{|F_1 A|} + \frac{|MF_2|}{|F_2 B|} = -y_0 \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) = \frac{y_0^2}{18} (3m_1^2 + 3m_2^2 + 10)$$

$$\text{又 } \because m_1 = \frac{x_0 + 2}{y_0}, m_2 = \frac{x_0 - 2}{y_0}, \therefore \frac{|MF_1|}{|F_1 A|} + \frac{|MF_2|}{|F_2 B|} = \frac{y_0^2}{18} \left[\frac{3(x_0 + 2)^2}{y_0^2} + \frac{3(x_0 - 2)^2}{y_0^2} + 10 \right]$$

$$= \frac{1}{18} (6x_0^2 + 10y_0^2 + 24) = \frac{84}{18} = \frac{14}{3}.$$

