**直线与双曲线综合练习**

例5.$($本小题$12.0$分$)$

已知$F\_{1}(−2,0)$，$F\_{2}(2,0)$，点$P$满足$\left|PF\_{1}\right|−\left|PF\_{2}\right|=2$，记点$P$的轨迹为$E$．

$(1)$求轨迹$E$的方程；

$(2)$若直线$l$过点$F\_{2}$且与轨迹$E$交于$P$、$Q$两点．

$(i)$无论直线$l$绕点$F\_{2}$怎样转动，在$x$轴上总存在定点$M(m,0)$，使$MP⊥MQ$恒成立，求实数$m$的值．

$(ii)$在$(i)$的条件下，求$ΔMPQ$面积的最小值．

【答案】解：$(1)$由$|PF\_{1}|−|PF\_{2}|=2<|F\_{1}F\_{2}|$知，点$P$的轨迹$E$是以$F\_{1}$、$F\_{2}$为焦点的双曲线右支，
由$c=2$，$2a=2$，$∴b^{2}=3$，
故轨迹$E$的方程为$x^{2}−\frac{y^{2}}{3}=1(x\geq 1)$．

$(2)$当直线$l$的斜率存在时，
设直线方程为$y=k(x−2)$，$P(x\_{1},y\_{1})$，$Q(x\_{2},y\_{2})$，
与双曲线方程联立消$y$得$(k^{2}−3)x^{2}−4k^{2}x+4k^{2}+3=0$，
$∴\left\{\begin{matrix}k^{2}−3\ne 0\\△>0\\x\_{1}+x\_{2}=\frac{4k^{2}}{k^{2}−3}>0\\x\_{1}⋅x\_{2}=\frac{4k^{2}+3}{k^{2}−3}>0\end{matrix}\right.$，解得$k^{2}>3$，
$$(i)∵\vec{MP}⋅\vec{MQ}=(x\_{1}−m)(x\_{2}−m)+y\_{1}y\_{2}$$

$$=(x\_{1}−m)(x\_{2}−m)+k^{2}(x\_{1}−2)(x\_{2}−2)$$

$$=(k^{2}+1)x\_{1}x\_{2}−(2k^{2}+m)(x\_{1}+x\_{2})+m^{2}+4k^{2}$$

$$=\frac{(k^{2}+1)(4k^{2}+3)}{k^{2}−3}−\frac{4k^{2}(2k^{2}+m)}{k^{2}−3}+m^{2}+4k^{2}$$

$=\frac{3−(4m+5)k^{2}}{k^{2}−3}+m^{2}$．
$∵MP⊥MQ$，$∴\vec{MP}⋅\vec{MQ}=0$，
故$3(1−m^{2})+k^{2}(m^{2}−4m−5)=0$对任意的$k^{2}>3$恒成立，
$∴\left\{\begin{matrix}1−m^{2}=0\\m^{2}−4m−5=0\end{matrix}\right.$，解得$m=−1$．
$∴$当$m=−1$时，$MP⊥MQ$．
当直线$l$的斜率不存在时，由$P(2,3)$，$Q(2,−3)$及$M(−1,0)$知结论也成立，
综上，当$m=−1$时，$MP⊥MQ$．
$(ii)$由$(i)$知，$M(−1,0)$，
当直线$l$的斜率存在时，$|PQ|=\sqrt[ ]{1+k^{2}}|x\_{1}−x\_{2}|=6\frac{1+k^{2}}{k^{2}−3}$，
$M$点到直线$PQ$的距离为$d$，则$d=\frac{3|k|}{\sqrt[ ]{1+k^{2}}}$
$$∴S\_{△MPQ}=\frac{1}{2}|PQ|d=9\frac{|k|\sqrt[ ]{1+k^{2}}}{k^{2}−3}$$

$=9\frac{\sqrt[ ]{(1+k^{2})k^{2}}}{k^{2}−3}=9\sqrt[ ]{\frac{(1+k^{2})k^{2}}{(k^{2}−3)^{2}}}$，
令$k^{2}−3=t(t>0)$，
则$S\_{△MPQ}=9\sqrt[ ]{\frac{12}{t^{2}}+\frac{7}{t}+1}$，因为$\frac{1}{t}>0$
所以$S\_{△MPQ}=9\sqrt[ ]{\frac{12}{t^{2}}+\frac{7}{t}+1}>9$，
当直线$l$的斜率不存在时，$S\_{△MPQ}=\frac{1}{2}⋅3⋅6=9$，
综上可知$S\_{△MPQ}\geq 9$，故$S\_{△MPQ}$的最小值为$9$．

【解析】本题考查了双曲线的标准方程及其性质、直线与双曲线相交问题、向量垂直与数量积的关系、一元二次方程的根与系数的关系、点到直线的距离公式、弦长公式、三角形的面积计算公式，属于难题．
$(1)$利用双曲线的定义及其标准方程即可得出；
$(2)$当直线$l$的斜率存在时，设直线方程为$y=k(x−2)$，$P(x\_{1},y\_{1})$，$Q(x\_{2},y\_{2})$，与双曲线方程联立消$y$得$(k^{2}−3)x^{2}−4k^{2}x+4k^{2}+3=0$，利用根与系数的关系、判别式解出即可得出．
$(i)$利用向量垂直与数量积的关系、根与系数的关系即可得出；
$(ii)$利用点到直线的距离公式、弦长公式、三角形的面积计算公式即可得出．

选用：已知双曲线$C:\frac{x^{2}}{a^{2}}−\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>0,b>0)$的左$､$右焦点分别为$F\_{1}､F\_{2}$，双曲线$C$的右顶点$A$在圆$O:x^{2}+y^{2}=3$上，且$\vec{AF\_{1}}⋅\vec{AF\_{2}}=−1$．

$(1)$求双曲线$C$的标准方程；

$(2)$动直线$l$与双曲线$C$恰有$1$个公共点，且与双曲线$C$的两条渐近线分别交于点$M､N$，设$O$为坐标原点．

$①$求证：点$M$与点$N$的横坐标的积为定值；

$②$求$△OMN$周长的最小值．

【答案】解：$(1)$设双曲线$C:\frac{x^{2}}{a^{2}}−\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>0,b>0)$的半焦距为$c$，$c>0$，
则$A(a,0)$，$F\_{1}(−c,0) ､F\_{2}(c,0)$，

由$A\left(a,0\right)$在圆$O:x^{2}+y^{2}=3$上，得：$a=\sqrt[ ]{3}$，

由$\vec{AF\_{1}}⋅\vec{AF\_{2}}=(−c−\sqrt[ ]{3},0)⋅(c−\sqrt[ ]{3},0)=3−c^{2}=−1$ ，解得$c=2$，

所以$b^{2}=c^{2}−a^{2}=1$，
则双曲线$C$的标准方程为$\frac{x^{2}}{3}−y^{2}=1$；

$(2)①$当直线$l$的斜率存在时，设其方程为$y=kx+m$，显然$k\ne 0$，

联立$\left\{\begin{matrix}\frac{x^{2}}{3}−y^{2}=1\\y=kx+m\end{matrix}\right.$，消去$y$得：$\left(3k^{2}−1\right)x^{2}+6kmx+3m^{2}+3=0$，

由直线$l$与双曲线$C$有且只有一个公共点，且与双曲线$C$的两条渐近线分别相交知：直线$l$与双曲线的渐近线不平行，且$m\ne 0$ ，

于是得 ，则$m^{2}=3k^{2}−1>0$ ，

双曲线$C$的渐近线为$y=\pm \frac{\sqrt[ ]{3}}{3}x⇔\frac{x^{2}}{3}−y^{2}=0$，

联立 $\left\{\begin{matrix}\frac{x^{2}}{3}−y^{2}=0\\y=kx+m\end{matrix}\right.$，消去$y$得：$\left(3k^{2}−1\right)x^{2}+6kmx+3m^{2}=0$，

设$M\left(x\_{1},y\_{1}\right)$，$N\left(x\_{2},y\_{2}\right)$，则$x\_{1}x\_{2}=\frac{3m^{2}}{3k^{2}−1}=3$，

当直线$l$的斜率不存在时，$x\_{1}=x\_{2}=\pm \sqrt[ ]{3}$，故$x\_{1}x\_{2}=3$，

综上，点$M$与点$N$的横坐标的积为定值$3$；

$②$由$①$知$x\_{1}x\_{2}=3$，

则$|OM|+|ON|+|MN|$
$=\sqrt[ ]{1+(\frac{\sqrt[ ]{3}}{3})^{2}}|x\_{1}|+\sqrt[ ]{1+(−\frac{\sqrt[ ]{3}}{3})^{2}}|x\_{2}|+\sqrt[ ]{(x\_{1}−x\_{2})^{2}+(\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}x\_{1}+\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}x\_{2})^{2}}$
$$=\frac{2\sqrt[ ]{3}}{3}(|x\_{1}|+|x\_{2}|)+\sqrt[ ]{\frac{4}{3}(x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2})−\frac{4}{3}x\_{1}x\_{2}}$$

$⩾\frac{4\sqrt[ ]{3}}{3}\sqrt[ ]{|x\_{1}x\_{2}|}+\sqrt[ ]{\frac{8}{3}x\_{1}x\_{2}−\frac{4}{3}x\_{1}x\_{2}}=6$，
当且仅当 $x\_{1}=x\_{2}$时取等号，

所以$△OMN$周长的最小值为$6$．

【解析】本题考查双曲线的标准方程，直线与双曲线的位置关系及应用，双曲线中的定值问题，属于较难题．
$(1)$由$A\left(a,0\right)$在圆上求出$a$，利用向量数量积的坐标表示求出$c$，进而可得双曲线方程；

$(2)①$设直线$l$方程为$y=kx+m$，联立双曲线方程求得$m^{2}=3k^{2}−1>0$ ，联立渐近线方程 $\frac{x^{2}}{3}−y^{2}=0$与直线$l$方程求$M$与$N$的横坐标，注意直线$l$斜率不存在情况的讨论；$②$利用两点距离公式求$\left|OM\right|+\left|ON\right|+\left|MN\right|$ ，结合基本不等式及$①$的结论即可求周长最小值．