**直线与双曲线综合练习**

例5.本小题分

已知，，点满足，记点的轨迹为．

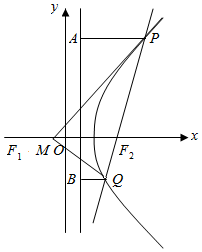
求轨迹的方程；

若直线过点且与轨迹交于、两点．

无论直线绕点怎样转动，在轴上总存在定点，使恒成立，求实数的值．

在的条件下，求面积的最小值．

【答案】解：由知，点的轨迹是以、为焦点的双曲线右支，  
由，，，  
故轨迹的方程为．  
  
当直线的斜率存在时，  
设直线方程为，，，  
与双曲线方程联立消得，  
，解得，  
  
  
  
  
．  
，，  
故对任意的恒成立，  
，解得．  
当时，．  
当直线的斜率不存在时，由，及知结论也成立，  
综上，当时，．  
由知，，  
当直线的斜率存在时，，  
点到直线的距离为，则  
  
，  
令，  
则，因为  
所以，  
当直线的斜率不存在时，，  
综上可知，故的最小值为．



【解析】本题考查了双曲线的标准方程及其性质、直线与双曲线相交问题、向量垂直与数量积的关系、一元二次方程的根与系数的关系、点到直线的距离公式、弦长公式、三角形的面积计算公式，属于难题．  
利用双曲线的定义及其标准方程即可得出；  
当直线的斜率存在时，设直线方程为，，，与双曲线方程联立消得，利用根与系数的关系、判别式解出即可得出．  
利用向量垂直与数量积的关系、根与系数的关系即可得出；  
利用点到直线的距离公式、弦长公式、三角形的面积计算公式即可得出．

选用：已知双曲线的左右焦点分别为，双曲线的右顶点在圆上，且．

求双曲线的标准方程；

动直线与双曲线恰有个公共点，且与双曲线的两条渐近线分别交于点，设为坐标原点．

求证：点与点的横坐标的积为定值；

求周长的最小值．

【答案】解：设双曲线的半焦距为，，  
则，，

由在圆上，得：，

由 ，解得，

所以，  
则双曲线的标准方程为；

当直线的斜率存在时，设其方程为，显然，

联立，消去得：，

由直线与双曲线有且只有一个公共点，且与双曲线的两条渐近线分别相交知：直线与双曲线的渐近线不平行，且 ，

于是得\left\{\begin{array}{l}{\rm Δ}=36{k}^{2}{m}^{2}−12(3{k}^{2}−1)({m}^{2}+1)=0 \\ 3{k}^{2}−1\neq 0\end{array}\right. ，则 ，

双曲线的渐近线为，

联立 ，消去得：，

设，，则，

当直线的斜率不存在时，，故，

综上，点与点的横坐标的积为定值；

由知，

则  
   
  
，  
当且仅当 时取等号，

所以周长的最小值为．

【解析】本题考查双曲线的标准方程，直线与双曲线的位置关系及应用，双曲线中的定值问题，属于较难题．  
由在圆上求出，利用向量数量积的坐标表示求出，进而可得双曲线方程；

设直线方程为，联立双曲线方程求得 ，联立渐近线方程 与直线方程求与的横坐标，注意直线斜率不存在情况的讨论；利用两点距离公式求 ，结合基本不等式及的结论即可求周长最小值．