**江苏省仪征中学2023-2024学年度第一学期高二数学周练（3）**

一、单选题（本大题共**8**小题，共**40.0**分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 如图，直线$l\_{1}$，$l\_{2}$，$l\_{3}$的倾斜角分别为$α\_{1}$，$α\_{2}$，$α\_{3}$，则有(    )

A. $α\_{1}<α\_{2}<α\_{3}$ B. $α\_{1}<α\_{3}<α\_{2}$ C. $α\_{3}<α\_{2}<α\_{1}$ D. $α\_{2}<α\_{1}<α\_{3}$

2. 直线$l\_{1}$经过$A(0,0)$，$B(\sqrt[ ]{3},1)$两点，直线$l\_{2}$的倾斜角是直线$l\_{1}$的倾斜角的$2$倍，则$l\_{2}$的斜率为(    )

A. $\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt[ ]{3}}{3}$ C. $1$ D. $\sqrt[ ]{3}$

3. $m=−\frac{1}{2}$是“直线$(m+2)x+3my+1=0$与直线$(m−2)x+(m−2)y−3=0$相互垂直”的(    )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要

4. 圆$C$：$x^{2}+y^{2}+2x−2my−4−4m=0(m\in R)$，则当圆$C$的面积最小时，圆上的点到坐标原点的距离的最大值为．(    )

A. $\sqrt[ ]{5}$ B. $6$ C. $\sqrt[ ]{5}−1$ D. $\sqrt[ ]{5}+1$

5. $▵ABC$三个顶点的坐标分别是$A(−1,−5)$，$B(2,4)$，$C(5,−5)$，则$▵ABC$外接圆的方程是(    )

A. $x^{2}+y^{2}−4x−2y−20=0$ B. $x^{2}+y^{2}+4x−2y−20=0$
C. $x^{2}+y^{2}−4x+2y−20=0$ D. $x^{2}+y^{2}+4x+2y−20=0$

6. 若圆$x^{2}+y^{2}=4$上恰有三个点到直线$y=x+b$的距离为$1$，则实数$b$的值为(    )

A. $\sqrt{2}$ B. $−\sqrt{2}$ C. $\pm 1$ D. $\pm \sqrt{2}$

7. 直线$y=x+b$与曲线$x=\sqrt{1−y^{2}}$有且仅有一个公共点，则$b$的取值范围是(    )

A. $−1<b\leq 1$或$b=−\sqrt{2}$ B. $−1\leq b<1$或$b=\sqrt{2}$
C. $−1\leq b<\sqrt{2}$ D. $|b|=\sqrt{2}$

8. 已知点$P$是圆$M:(x−2)^{2}+(y−2)^{2}=2$上的动点，线段$AB$是圆$C:(x+1)^{2}+(y+1)^{2}=4$的一条动弦，且$|AB|=2\sqrt[ ]{3}$，则$|\vec{PA}+\vec{PB}|$的最大值是(    )

A. $3\sqrt[ ]{2}$ B. $8\sqrt[ ]{2}$ C. $5\sqrt[ ]{2}$ D. $8\sqrt[ ]{2}+2$

二、多选题（本大题共**4**小题，共**20.0**分。在每小题有多项符合题目要求）

9. 已知点$P(−1,1)$与直线$l:x−y+1=0$，下列说法正确的是(    )

A. 过点$P$且截距相等的直线与直线$l$一定垂直
B. 过点$P$且与坐标轴围成三角形的面积为$2$的直线有$3$条
C. 点$P$关于直线$l$的对称点坐标为$(0,2)$
D. 直线$l$关于点$P$对称直线方程为$x−y−1=0$

10. 已知直线$l:kx−y+2k=0$和圆$O:x^{2}+y^{2}=16$，则(    )

A. 直线$l$恒过定点$\left(2,0\right)$
B. 存在$k$使得直线$l$与直线$l\_{0}:x−2y+2=0$垂直
C. 直线$l$与圆$O$相交
D. 若$k=−1$，直线$l$被圆$O$截得的弦长为$4$

11. 已知直线$l\_{1}:x−y−1=0$，动直线$l\_{2}:(k+1)x+ky+k=0(k\in R)$，则下列结论正确的是(    )

A. 不存在$k$，使得$l\_{2}$的倾斜角为$90°$ B. 对任意的$k$，$l\_{1}$与$l\_{2}$都有公共点
C. 对任意的$k$，$l\_{1}$与$l\_{2}$都不重合 D. 对任意的$k$，$l\_{1}$与$l\_{2}$都不垂直

12. 古希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名，他发现：平面内到两个定点$A$、$B$的距离之比为定值$λ(λ\ne 1)$的点所形成的图形是圆$.$后来，人们将这个圆以他的名字命名，成为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆$.$已知在平面直角坐标系$xOy$中，$A(−2,0)$、$B(4,0)$，点$Р$满足$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$，设点$Р$所构成的曲线为$C$，下列结论正确的是(    )

A. $C$的方程为
B. 在$C$上存在点$D$，使得
C. 在$C$上存在点$M$，使$M$在直线上
D. 在$C$上存在点$N$，使得

三、填空题（本大题共**4**小题，共**20.0**分）

13. 两平行直线$3x−2y−1=0$和$6x−4y+3=0$间的距离是          ．

14. 已知$a\in R$，方程$a^{2}x^{2}+(a+2)y^{2}+4x+8y+5a=0$表示圆，则圆心坐标为          ，半径为          ．

15. 已知点$A(0,2)$，$B(2,0)$，若点$C$在函数$y=x^{2}$的图像上，则使$△ABC$的面积为$2$的点$C$有          个$.$

1. 若圆$C$：$x^{2}+y^{2}−2x−2y−7=0$关于直线$ax+by+3=0$对称，由点$P(a,b)$向圆$C$作切线，切点为$A$，则线段$PA$的最小值为          ．

四、解答题（本大题共**6**小题，共**70.0**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. $($本小题$10.0$分$)$

已知直线$l$：$y=ax+\frac{3−a}{5}$．

$(1)$求证：无论$a$为何值，直线$l$必经过第一象限．

$(2)$若直线$l$不经过第二象限，求实数$a$的取值范围．

18. $($本小题$12.0$分$)$

已知$△ABC$的顶点$B\left(3,2\right)$，$AB$边上的高所在的直线方程为$x−2y−5=0$．

$(1)$求直线$AB$的方程；

$(2)$在两个条件中任选一个，补充在下面问题中．

$①$角$A$的平分线所在直线方程为$x+2y−13=0$；

$②BC$边上的中线所在的直线方程为$2x−y−12=0$．

\_\_\_\_\_\_，求直线$AC$的方程．

19. $($本小题$12.0$分$)$

已知圆$C:(x+2)^{2}+(y−5)^{2}=16$．

$(1)$若直线$l$过点$A(−1,2)$且被圆$C$截得的弦长为$2\sqrt[ ]{11}$，求直线$l$的方程$;$

$(2)$若直线$l$过点$B(3,4)$且与圆$C$相交于$M$，$N$两点，求$△CMN$的面积的最大值，并求此时直线$l$的方程．

20. $($本小题$12.0$分$)$

已知圆$C$过点$A\left(4,0\right)$，$B\left(0,4\right)$，且圆心$C$在直线$l:x+y−6=0$上$.$

$(1)$若从点$M\left(4,1\right)$发出的光线经过直线$y=−x$反射，反射光线$l\_{1}$恰好平分圆$C$的圆周，求反射光线$l\_{1}$所在直线的一般式方程；

$(2)$若点$Q$在直线$l$上运动，求$QA^{2}+3QB^{2}$的最小值．

1. $($本小题$12.0$分$)$
已知圆$C$：$(x−2)²+(y−3)²=1$与圆$C′$：$x^{2}+(y−1)²=5$．
$(1)$求$C$与$C′$相交所得公共弦长；
$(2)$若过点$A(0,1)$且斜率为$k$的直线$l$与圆$C$交于$P$，$Q$两点，其中$O$为坐标原点，且$\vec{OP}⋅\vec{OQ}=12$，求$|\vec{PQ}|.$

22. $($本小题$12.0$分$)$

已知半径为$\frac{8}{3}$ 的圆$C$的圆心在$y$ 轴的正半轴上，且直线$12x−9y−1=0$与圆$C$相切．

$(1)$求圆$C$的 标准方程．

$(2)$已知$A\left(0,−1\right)$，$P$为圆$C$上任意一点，试问在$y$轴上是否存在定点$B($异于点$A)$，使得$\frac{\left|PB\right|}{\left|PA\right|}$为定值？若存在，求点$B$的坐标；若不存在，请说明理由．

$(3)$在$(2)$的条件下，若点$D\left(4,6\right)$，试求$\frac{1}{2}\left|PA\right|+\left|PD\right|$的最小值．

**答案和解析**

1.【答案】$B$

【解析】【分析】

此题主要考查直线的倾斜角，是基础题．
由图可知，直线$l\_{1}$的倾斜角$α\_{1}$为锐角，直线$l\_{2}$、$l\_{3}$的倾斜角均为钝角，且$α\_{2}>α\_{3}$，即可得解．

【解答】

解：由图可知，

直线$l\_{1}$的倾斜角$α\_{1}$为锐角，

直线$l\_{2}$、$l\_{3}$的倾斜角均为钝角，且$α\_{2}>α\_{3}$，

所以有$α\_{1}<α\_{3}<α\_{2}$．

故选*B*．

2.【答案】$D$

【解析】【分析】

由题意求得直线$l\_{1}$的斜率，可得直线$l\_{1}$的倾斜角，从而求得$l\_{2}$的倾斜角，可得$l\_{2}$的斜率．
本题主要考查直线的斜率和倾斜角，属于基础题．

【解答】
解：$∵$直线$l\_{1}$经过$A(0,0)$，$B(\sqrt[ ]{3},1)$两点，$∴$直线$l\_{1}$的斜率为$\frac{1−0}{\sqrt[ ]{3}−0}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}$，
$∴$直线$l\_{1}$的倾斜角为$\frac{π}{6}$，
$∵$直线$l\_{2}$的倾斜角是直线$l\_{1}$的倾斜角的$2$倍，则$l\_{2}$的倾斜角为$\frac{π}{3}$，$l\_{2}$的斜率为$\sqrt[ ]{3}$，
故选：$D$．

3.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查必要条件、充分条件与充要条件的判断和两条直线垂直的判定，属于中档题．
根据必要条件、充分条件与充要条件的定义结合两条直线垂直的判定判断即可．

【解答】
解：由已知若直线$(m+2)x+3my+1=0$和直线$(m−2)x+(m−2)y−3=0$相互垂直，
则$(m+2)\left(m−2\right)+3m\left(m−2\right)=0$，
解得$m=−\frac{1}{2}$或$2$，
当$m=2$时，直线$(m−2)x+(m−2)y−3=0$不存在，
所以$m=−\frac{1}{2}$是“直线$(m+2)x+3my+1=0$和直线$(m−2)x+(m−2)y−3=0$相互垂直”的充要条件．
故选*C*．

4.【答案】$D$

【解析】【分析】

本题考查圆的一般方程与标准方程，注意将圆的一般方程变形为标准方程，属于中等题．
根据题意，将圆的方程变形为普通方程，分析其圆心半径，可得当圆$C$的面积最小时，必有$m=−2$，此时$r^{2}=1$，即可得此时面积最小时圆的方程，结合点与圆的位置关系分析可得答案．

【解答】
解：根据题意，圆$C$：$x^{2}+y^{2}+2x−2my−4−4m=0(m\in R)$，
变形可得$(x+1)^{2}+(y−m)^{2}=m^{2}+4m+5$，
其圆心为$(−1,m)$，半径为$r$，
则$r^{2}=m^{2}+4m+5=(m+2)^{2}+1$，
当圆$C$的面积最小时，必有$m=−2$，此时$r^{2}=1$，
圆$C$的方程为$(x+1)^{2}+(y+2)^{2}=1$，
圆心$C$到原点为距离$d=\sqrt[ ]{1+4}=\sqrt[ ]{5}$，
则圆上的点到坐标原点的距离的最大值为$d+r=\sqrt[ ]{5}+1$．
故选：$D$．

5.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查了圆的一般方程，属于基础题．
利用圆的一般方程列出方程组求解即可．

【解答】

解：设所求圆方程为 $x^{2}+y^{2}+Dx+Ey+F=0$ ，

因为 $A(−1,−5)$ ， $B(2,4)$ ， $C(5,−5)$ 三点都在圆上，

所以 $\left\{\begin{matrix}26−D−5E+F=0\\20+2D+4E+F=0\\50+5D−5E+F=0\end{matrix}\right.$ ，解得 $\left\{\begin{matrix}D=−4\\E=2\\F=−20\end{matrix}\right.$ ，

即所求圆方程为： $x^{2}+y^{2}−4x+2y−20=0$ ．

故选：$C$．

6.【答案】$D$

【解析】【分析】

本题考查直线与圆的位置关系，属于中档题
根据圆的性质，结合点到直线的距离公式进行求解即可．

【解答】

解：圆 $x^{2}+y^{2}=4$ 的圆心坐标为 $(0,0)$ ，半径为 $2$ ，

因为圆 $x^{2}+y^{2}=4$ 上恰有三个点到直线 $y=x+b$ 的距离为$1$，

所以圆心到直线 $y=x+b$ 的距离为$1$，所以有 $\frac{|b|}{\sqrt{1^{2}+(−1)^{2}}}=1⇒b=\pm \sqrt{2}$ ，

故选：$D$

7.【答案】$A$

【解析】【分析】

本题主要考查了直线与圆的位置关系的应用，属于综合题．
把曲线方程整理后可知其图象为半圆，画出图象，要使直线与曲线有且仅有一个交点，从图上看出其三个极端情况分别是：直线在第四象限与曲线相切，交曲线于 $(0,−1)$ 和另一个点，及与曲线交于点 $(0,1)$ ，分别求出 $b$ ，则 $b$ 的范围可得．

【解答】

解：曲线 $x=\sqrt{1−y^{2}}$ ，即 $x^{2}+y^{2}=1$ $(x\geq 0)$ ，

表示一个半圆$($单位圆位于 $y$ 轴及 $y$ 轴右侧的部分$)$，

如图，设 $A(0,1)$ 、 $B(1,0)$ 、 $C(0,−1)$ ，

当直线 $y=x+b$ 经过点 $A$ 时， $1=0+b$ ，求得 $b=1$ ，

此时只有一个公共点，符合题意；

当直线 $y=x+b$ 经过点 $B$ 、点 $C$ 时， $0=1+b$ ，求得 $b=−1$ ，

此时有$2$个公共点，不符合题意；

当直线 $y=x+b$ 和半圆相切时，由圆心到直线的距离等于半径，

可得 $1=\frac{|b|}{\sqrt{2}}$ ，求得 $b=−\sqrt{2}$ 或 $b=\sqrt{2}$ $($舍去$)$，

即： $b=−\sqrt{2}$ 时，只有一个公共点，符合题意，

综上得，实数 $b$ 的范围为 $−1<b\leq 1$ 或 $b=−\sqrt{2}$ ，

故选：$A.$

8.【答案】$D$

【解析】【分析】

本题主要考查了圆的轨迹方程，圆与圆的最值问题，考查向量模的最值的求法，理解题意是关键．
过点$C$作$CD⊥AB$于$D$，求得$|CD|=1$，从而得点$D$的轨迹方程，求得$|\vec{PD}|$的最大值，再由$|\vec{PA}+\vec{PB}|=2|\vec{PD}|$得答案．

【解答】
解：圆$M:(x−2)^{2}+(y−2)^{2}=2$的圆心为$M\left(2,2\right)$，半径为$\sqrt[ ]{2}$，
圆$C:(x+1)^{2}+(y+1)^{2}=4$的圆心为$C\left(−1,−1\right)$，半径为$2$，
如图，过点$C$作$CD⊥AB$，垂足为$D$，连接$CB$，

$∴D$为$AB$中点，即$|BD|=\sqrt[ ]{3}$，
又$|CB|=2$，
$∴|CD|=\sqrt[ ]{\left|CB\right|^{2}−\left|BD\right|^{2}}=\sqrt[ ]{4−3}=1$，
$∴$点$D$的轨迹是以$C$为圆心，$1$为半径的圆，
$∴$点$D$的轨迹方程为$(x+1)^{2}+(y+1)²=1$，
$∵D$是$AB$中点，
$∴\vec{PA}+\vec{PB}=2\vec{PD}$，
$|\vec{PD}|\_{max}=\left|CM\right|+\sqrt[ ]{2}+1=\sqrt[ ]{(−1−2)^{2}+(−1−2)^{2}}+\sqrt[ ]{2}+1=4\sqrt[ ]{2}+1$，
所以$|\vec{PA}+\vec{PB}|$的最大值为$2(4\sqrt[ ]{2}+1)=8\sqrt[ ]{2}+2$．
故选*D*．

9.【答案】$AB$

【解析】【分析】

本题考查直线方程的应用，属于中档题．
对于$A$：分别求出截距为$0$和截距不为$0$进行讨论，求出过点$P$且截距相等的直线$y=−x$，即可判断；

对于$B$：直接求出过点$P$且与坐标轴围成三角形的面积为$2$的直线；

对于$C$：直接求出点$P$关于直线$l$的对称点坐标$\left(0,0\right)$，即可判断；

对于$D$：直接求出直线$l$关于点$P$对称直线方程，即可判断．

【解答】

解：已知点$P(−1,1)$与直线$l:x−y+1=0$．

对于$A$：当截距为$0$时，直线$y=−x$与直线$l:x−y+1=0$垂直；

当截距相等且不为$0$时，可设直线：$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$，把$P(−1,1)$代入，无解．

所以过点$P$且截距相等的直线$y=−x$与直线$l$垂直，故*A*正确；

对于$B$：过点$P$的直线与坐标轴围成三角形存在，所以斜率必存在且不为$0$，可设其为$k$，则直线为$y−1=k\left(x+1\right)$，所以三角形的面积为$\frac{1}{2}|1+k||1+\frac{1}{k}|=2$，解得：$k=1$或$k=−3\pm 2\sqrt[ ]{2}$，所以符合题意的直线有$3$条，故*B*正确；

对于$C$：设点$P$关于直线$l$的对称点坐标$\left(x,y\right)$，则有$\left\{\begin{matrix}\begin{matrix}\frac{y−1}{x+1}×1=−1\\\frac{x−1}{2}−\frac{y+1}{2}+1=0\end{matrix}\end{matrix}\right.$，解得：$\left\{\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right.$，

即点$P$关于直线$l$的对称点坐标$\left(0,0\right)$，故*C*错误；

对于$D$：设直线$l$关于点$P$对称直线方程为$x−y+c=0,\left(c\ne 1\right)$，则有$\frac{\left|−1−1+c\right|}{\sqrt[ ]{1+1}}=\frac{\left|−1−1+1\right|}{\sqrt[ ]{1+1}}$，解得$c=3$，即设直线$l$关于点$P$对称直线方程为$x−y+3=0$，故*D*错误．

故答案选：$AB$．

10.【答案】$BC$

【解析】【分析】

本题考查直线过定点问题，两条直线垂直的判断，直线与圆的位置关系，属于中档题．
利用直线系方程求出直线$l$所过定点坐标判断$A$，进而结合点与圆的位置关系判断$C$；求出使得直线$l$与直线$l\_{0}:x−2y+2=0$垂直的$k$值判断$B$；根据弦长公式求出弦长可判断$D$．

【解答】

解：对于$A$、$C$，由$l:kx−y+2k=0$，得$k(x+2)−y=0$，令$\left\{\begin{matrix}x+2=0\\−y=0\end{matrix}\right.$，解得$\left\{\begin{matrix}x=−2\\y=0\end{matrix}\right.,$

所以直线$l$恒过定点$(−2,0)$，故*A*错误；

因为直线$l$恒过定点$(−2,0)$，而$\left(−2\right)^{2}+0^{2}=4<16$，即$(−2,0)$在圆$O:x^{2}+y^{2}=16$内，

所以直线$l$与圆$O$相交，故*C*正确；

对于$B$，直线$l\_{0}:x−2y+2=0$的斜率为$\frac{1}{2}$，直线$l:kx−y+2k=0$的斜率为$k$，
则当$k=−2$时，满足直线$l$与直线$l\_{0}:x−2y+2=0$垂直，故*B*正确；

对于$D$，$k=−1$时，直线$l:x+y+2=0$，圆$O:x^{2}+y^{2}=16$的圆心为$(0,0)$，半径$r=4$，
则圆心到直线$l$的距离为$d=\frac{\left|0+0+2\right|}{\sqrt[ ]{1^{2}+1^{2}}}=\sqrt[ ]{2}$，

所以直线$l$被圆$O$截得的弦长为$2\sqrt[ ]{r^{2}−d^{2}}=2\sqrt[ ]{4^{2}−\left(\sqrt[ ]{2}\right)^{2}}=2\sqrt[ ]{14}$，故*D*错误．

故选*BC*．

11.【答案】$BD$

【解析】【分析】

本题主要考查直线的一般式方程，两条直线的位置关系，属于中档题．
根据直线的一般式方程，两条直线的位置关系逐一判断各个选项是否正确，从而得出结论．

【解答】
解：对于动直线$l\_{2}$：$(k+1)x+ky+k=0(k\in R)$，
当$k=0$时，$l\_{2}$斜率不存在，倾斜角为$90°$，故*A*错误；
由于方程组$\left\{\begin{matrix}x−y−1=0\\(k+1)x+ky+k=0\end{matrix}\right.$，可得$(2k+1)x=0$，
当$k\ne −\frac{1}{2}$时，此方程有解；
当$k=−\frac{1}{2}$时，$\frac{k+1}{1}=\frac{k}{−1}=\frac{k}{−1}$，此时$l\_{1}$与$l\_{2}$重合，
可得对任意的$k$，$l\_{1}$与$l\_{2}$都有交点，故*B*正确，*C*错误；
由于直线$l\_{1}$：$x−y−1=0$的斜率为$1$，
当$k\ne 0$时，动直线$l\_{2}$的斜率为$\frac{k+1}{−k}=−1−\frac{1}{k}\ne −1$；
当$k=0$时，显然$l\_{1}$与$l\_{2}$不垂直，
故对任意的$k$，$l\_{1}$与$l\_{2}$都不垂直，故*D*正确，
故选*BD*．

12.【答案】$AD$

【解析】【分析】

本题主要考查了两点间的距离公式，圆的标准方程，直线与圆的位置关系及判定，圆的有关轨迹问题的应用，属于中档题．

通过设出点$P$的坐标，利用$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$，即可求出曲线$C$的轨迹方程，然后假设曲线$C$上一点坐标，根据$BCD$三个选项逐一列出所满足条件，然后与$C$的轨迹方程联立，判断是否有解，即可得出答案．

【解答】

解：设点$P(x,y)$，由$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$，

得$\frac{\sqrt[ ]{(x+2)^{2}+y^{2}}}{\sqrt[ ]{(x−4)^{2}+y^{2}}}=\frac{1}{2}$，化简得$x^{2}+y^{2}+8x=0$，即$(x+4)^{2}+y^{2}=16$，故$A$选项正确；

对于$B$选项，设$D(x\_{0},y\_{0})$，由$\left|AD\right|=1$得$\sqrt[ ]{(x\_{0}+2)^{2}+(y\_{0}−0)^{2}}=1$，

联立方程$(x\_{0}+4)^{2}+y\_{0}^{2}=16$，该方程组无解，故*B*选项错误$;$
对于$C$选项，联立$\left\{\begin{matrix}x+y−2=0\\(x+4)^{2}+y^{2}=16\end{matrix}\right.$，
消去$y$整理得：$x^{2}+2x+2=0$，
此方程无解，故*C*选项错误$;$
由于$D$选项，设$N(x\_{0},y\_{0})$，
则$x\_{0}^{2}+y\_{0}^{2}+(x\_{0}+2)^{2}+y\_{0}^{2}=4$，
又$(x\_{0}+4)^{2}+y\_{0}^{2}=16$，联立方程消去$y\_{0}$得$x\_{0}=0$，
解得$y\_{0}=0$，有解，故*D*选项正确．

13.【答案】$\frac{5\sqrt[ ]{13}}{26}$

【解析】【分析】

本题考查两条平行直线间的距离，属于基础题．
根据给定条件，利用两条平行直线间的距离公式计算作答．

【解答】

解：直线$3x−2y−1=0$化为：$6x−4y−2=0$，

所以直线$3x−2y−1=0$和$6x−4y+3=0$间的距离是$\frac{|−2−3|}{\sqrt[ ]{6^{2}+(−4)^{2}}}=\frac{5\sqrt[ ]{13}}{26}$．

故答案为$\frac{5\sqrt[ ]{13}}{26}$．

14.【答案】$(−2,−4)；5$

【解析】【分析】

本题考查圆的一般方程及标准方程，属于基础题．
由已知可得$a^{2}=a+2\ne 0$，解得$a=−1$或$a=2$，把$a=−1$代入原方程，配方求得圆心坐标和半径，把$a=2$代入原方程，由$D^{2}+E^{2}−4F<0$，说明方程不表示圆，则答案可求．

【解答】
解： $∵$方程$a^{2}x^{2}+(a+2)y^{2}+4x+8y+5a=0$表示圆，
$∴a^{2}=a+2\ne 0$，解得$a=−1$或$a=2$，
当$a=−1$时，方程化为$x^{2}+y^{2}+4x+8y−5=0$，
配方得$(x+2)^{2}+(y+4)^{2}=25$，所得圆的圆心坐标为$(−2,−4)$，半径为$5$；
当$a=2$时，方程化为$x^{2}+y^{2}+x+2y+\frac{5}{2}=0$，
此时$D^{2}+E^{2}−4F=1+4−4×\frac{5}{2}=−5<0$，方程不表示圆，
故答案为$(−2,−4); 5$．

15.【答案】$4$

【解析】【分析】

本题考查两点间距离公式和点到直线距离公式，是基础题．

【解答】
解：设点$C(t,t^{2})$，直线$AB$的方程是$x+y−2=0$，$|AB|=2\sqrt[ ]{2}$．
由于$△ABC$的面积为$2$，所以$AB$边上的高$ℎ$满足方程$\frac{1}{2}×2\sqrt[ ]{2}×ℎ=2$，即$ℎ=$ $\sqrt[ ]{2}$．
由点到直线的距离公式，得$\sqrt[ ]{2}=\frac{|t+t^{2}−2|}{\sqrt[ ]{2}}$，即$|t^{2}+t−2|=2$，即$t^{2}+t− 2=2$或$t^{2}+t−2=−2$，
解方程可得$t$有$4$个不同的值，所以这样的点$C$有$4$个．

16.【答案】$\frac{\sqrt[ ]{14}}{2}$

【解析】【分析】

本题考查了圆的切线长及圆的对称性的应用，两点间的距离公式，属于较难题．

由题意可知直线经过圆的圆心，推出$a$，$b$的关系，利用$(a,b)$与圆心的距离，半径，求出切线长的表达式，然后求出最小值．

【解答】

解：圆$C:x^{2}+y^{2}−2x−2y−7=0$化为$(x−1)^{2}+(y−1)^{2}=9$，

圆的圆心坐标为$\left(1,1\right)$，半径为$r=3$．

圆$(x−1)^{2}+(y−1)^{2}=9$关于直线$ax+by+3=0$对称，所以$\left(1,1\right)$在直线上，

$∴a+b+3=0$，即$b=−a−3$，

点$(a,b)$与圆心的距离为$\sqrt[ ]{(a−1)^{2}+(b−1)^{2}}$，

所以点$(a,b)$向圆$C$所作切线长：$\sqrt[ ]{\left(a−1\right)^{2}+\left(b−1\right)^{2}−9}=\sqrt[ ]{2\left(a+\frac{3}{2}\right)^{2}+\frac{7}{2}}\geq \frac{\sqrt[ ]{14}}{2}$

当且仅当$a=−\frac{3}{2}$时切线长最小为$\frac{\sqrt[ ]{14}}{2}$．

故答案为：$\frac{\sqrt[ ]{14}}{2}$．

17.【答案】解：$(1)∵y=ax+\frac{3−a}{5}=a\left(x−\frac{1}{5}\right)+\frac{3}{5}$，

$∴$直线$l$恒过定点$(\frac{1}{5},\frac{3}{5})$．

因为点$(\frac{1}{5},\frac{3}{5})$位于第一象限，所以直线$l$必经过第一象限． 5分

$(2)$如图，

直线$OA$的斜率$k\_{OA}=\frac{\frac{3}{5}−0}{\frac{1}{5}−0}=3$．

若直线$l$不经过第二象限，则直线$l$的斜率$k\_{l}\geq 3$，

即$a\geq 3$．

所以实数$a$的取值范围为$[3,+\infty )$． 5分

【解析】本题考查直线过定点和象限以及参数取值范围问题，属于较易题．
$(1)$将条件中的直线表达式变形为$y=ax+\frac{3−a}{5}=a\left(x−\frac{1}{5}\right)+\frac{3}{5}$，即可得证；
$(2)$利用直线$OA$的斜率$k\_{OA}=3$，若直线$l$不经过第二象限，则直线$l$的斜率$k\_{l}\geq 3$，即可得．

18.【答案】解：$(1)$因为$AB$边上的高所在的直线方程为$x−2y−5=0$，

所以直线$AB$的斜率为$k=−2$，

又因为$△ABC$的顶点$B\left(3,2\right)$，

所以直线$AB$的方程为：$y−2=−2\left(x−3\right)$，即$2x+y−8=0$；5分

$(2)$若选$①$，角$A$的平分线所在直线方程为$x+2y−13=0$，

由$\left\{\begin{matrix}2x+y−8=0\\x+2y−13=0\end{matrix}\right.$，解得$\left\{\begin{matrix}x=1\\y=6\end{matrix}\right.$，所以点$A$坐标为$A(1,6)$，

设点$B$关于$x+2y−13=0$的对称点为$B′\left(x\_{0},y\_{0}\right)$，

则$\left\{\begin{matrix}\frac{y\_{0}−2}{x\_{0}−3}=2\\\frac{(x\_{0}+3)}{2}+2×\frac{y\_{0}+2}{2}−13=0\end{matrix}\right.$，解得$\left\{\begin{matrix}x\_{0}=\frac{27}{5}\\y\_{0}=\frac{34}{5}\end{matrix}\right.,$

即$B′$坐标为$(\frac{27}{5},\frac{34}{5})$，

又点$B′(\frac{27}{5},\frac{34}{5})$在直线$AC$上，所以$k\_{AC}=\frac{\frac{34}{5}−6}{\frac{27}{5}−1}=\frac{2}{11}$，

所以直线$AC$的方程为$y−6=\frac{2}{11}(x−1)$，即$2x−11y+64=0$． 7分

若选$②$：$BC$边上的中线所在的直线方程为$2x−y−12=0$，

由$\left\{\begin{matrix}2x−y−12=0\\2x+y−8=0\end{matrix}\right.$，解得$\left\{\begin{matrix}x=5\\y=−2\end{matrix}\right.$，所以点$A(5,−2)$，

设点$C\left(x\_{1},y\_{1}\right)$，则$BC$的中点在直线$2x−y−12=0$上，

所以$2×\frac{x\_{1}+3}{2}−\frac{y\_{1}+2}{2}−12=0$ ，

即$2x\_{1}−y \_{1}−20=0$，所以点$C$在直线$2x−y−20=0$上，

又点$C$在直线$x−2y−5=0$上，联立$\left\{\begin{matrix}2x−y−20=0\\x−2y−5=0\end{matrix}\right.,$

解得$\left\{\begin{matrix}x=\frac{35}{3}\\y=\frac{10}{3}\end{matrix}\right.$，即得$C(\frac{35}{3},\frac{10}{3})$，

所以$k\_{AC}=\frac{\frac{10}{3}+2}{\frac{35}{3}−5}=\frac{4}{5}$，所以直线$AC$的方程为$y+2=\frac{4}{5}(x−5)$，

即直线$AC$的方程为$4x−5y−30=0$．7分

【解析】本题直线方程的综合求法及应用，考查两条直线垂直的判定及应用，点线对称问题，两条直线的交点，直线方程的求解，考查运算求解能力，属于中档题．
$(1)$根据$AB$边上的高所在的直线方程，可求得直线$AB$的斜率，可得答案；

$(2)$选$①$，先求出点$A$坐标，再求得点$B$关于角$A$的平分线的对称点坐标，该对称点一定在直线$AC$上，由此可求得直线$AC$的方程；

选$②$，联立方程，先求出点$A$坐标，根据$BC$边上的中线所在的直线方程，求出点$C$坐标满足$2x−y−20=0$，联立方程求出$C$点坐标，即可求得直线$AC$的方程．

19.【答案】解：$(1)$圆$C$的圆心坐标为$C(−2,5)$，半径$r=4$，
$∵$直线$l$被圆$C$截得的弦长为$2\sqrt[ ]{11}$，
$∴$圆心$C$到直线$l$的距离$d=\sqrt[ ]{5}$．
$①$当直线$l$的斜率不存在时，
直线$l$的方程：$x=−1$，显然不满足$d=\sqrt[ ]{5}$；
$②$当直线$l$的斜率存在时，
设直线$l$的方程：$y−2=k(x+1)$，即$kx−y+k+2=0$，
由圆心$C$到直线$l$的距离$d=\sqrt[ ]{5}$得：$\frac{|−k−3|}{\sqrt[ ]{1+k^{2}}}=\sqrt[ ]{5}$，解得$k=2$或$k=−\frac{1}{2}$，
故直线$l$的方程：$2x−y+4=0$或$x+2y−3=0$；6分
$(2)$因为直线$l$过点$B(3,4)$且与圆$C$相交，所以直线$l$的斜率一定存在，设直线$l$的方程为
$y−4=k(x−3)$，即$kx−y+4−3k=0$，
则圆心$C$到直线$l$的距离为$d=\frac{|−5k−1|}{\sqrt[ ]{1+k^{2}}}$，
又$∵△CMN$的面积$S=\frac{1}{2}×d×2\sqrt[ ]{16−d^{2}}$
$=d\sqrt[ ]{16−d^{2}}=\sqrt[ ]{d^{2}(16−d^{2})}=\sqrt[ ]{−(d^{2}−8)^{2}+64}$，
$∴$当$d=2\sqrt[ ]{2}$时，$S$取最大值$8$，
由$d=\frac{|−5k−1|}{\sqrt[ ]{1+k^{2}}}=2\sqrt[ ]{2}$，得$k=−1$或$k=\frac{7}{17}$，
$∴$直线$l$的方程为$x+y−7=0$或$7x−17y+47=0$． 6分

【解析】本题考查圆的方程的综合应用，直线与圆的位置关系，涉及二次函数的最值，考查分类讨论、转化思想以及计算能力，属于中档题．
$(1)$求出圆$C$的圆心坐标为$C(−2,5)$，半径$r=4$，推出圆心$C$到直线$l$的距离$d=\sqrt[ ]{5}$，$①$当直线$l$的斜率不存在时，直线$l$的方程：$x−1$，判断是否满足题意；$②$当直线$l$的斜率存在时，设直线$l$的方程：$y−2=k(x+1)$，利用点到直线的距离公式求解即可．
$(2)$设直线$l$方程：$y−4=k(x−3)$，利用点到直线的距离公式以及三角形面积公式，通过二次函数的最值求解即可．

20.【答案】本题考查了直线方程的求解，考查了圆的性质，考查了二次函数的性质及两点间的距离公式，属于一般题．
$(1)$求出直线$AB$的垂直平分线方程，与直线$l$的方程联立可求圆心$C$的坐标，求出点$M\left(4,1\right)$关于直线$y=−x$的对称点$M\_{1}$的坐标，根据反射光线$l\_{1}$必经过点$M\_{1}$和点$C$，由两点式方程可求解；
$(2)$设点$Q\left(x\_{0},y\_{0}\right)$，则$x\_{0}+y\_{0}−6=0$，利用两点间的距离公式及二次函数的性质可求解．

【解析】解：$(1)$圆$C$过点$A\left(4,0\right)$，$B\left(0,4\right)$，故*A*，$B$的中点为$(2,2)$，直线$AB$的方程为$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$，即$x+y=4$，
所以直线$AB$的垂直平分线为$y−2=x−2$，即$y=x$．
因为圆心$C$在直线：$l$：$x+y−6=0$上，且$y=x$经过圆心$C$，
由$\{\begin{array}{c}x+y−6=0\\y=x\end{array}$，得$\left\{\begin{matrix}x=3\\y=3\end{matrix}\right.$，即圆$C$的圆心$C\left(3,3\right)$．

设点$M\left(4,1\right)$关于直线$y=−x$的对称点为$M\_{1}\left(a,b\right)$，

$\left\{\begin{matrix} &K\_{MM\_{1}}=\frac{b−1}{a−4}=1\\ &\frac{1+b}{2}=−\frac{4+a}{2}\end{matrix}\right.$，解得$a=−1$，$b=−4$，则$M\_{1}\left(−1,−4\right)$，

则反射光线$l\_{1}$必经过点$M\_{1}$和点$C$，
所以直线$l\_{1}$的方程为$\frac{y+4}{3+4}=\frac{x+1}{3+1}$，即$7x−4y−9=0$．6分

$(2)$设点$Q\left(x\_{0},y\_{0}\right)$，则$x\_{0}+y\_{0}−6=0$．
又$QA^{2}+3QB^{2}=(x\_{0}−4)^{2}+y\_{0}^{2}+3x\_{0}^{2}+3(y\_{0}−4)^{2}$
$$=(x\_{0}−4)^{2}+(6−x\_{0})^{2}+3x\_{0}^{2}+3(2−x\_{0})^{2}$$

$=8(x\_{0}^{2}−4x\_{0}+8)=8[(x\_{0}−2)^{2}+4]$，
当$x\_{0}=2$时，$QA^{2}+3QB^{2}$的最小值为$32$．6分

21.【答案】解：$(1)$由题意知，两圆的公共弦所在直线方程为$(x−2)²+(y−3)²−[x^{2}+(y−1)²]=1−5=−4$，
整理得$x+y−4=0$，
圆心$C′(0,1)$到直线$x+y−4=0$的距离$d=\frac{|1−4|}{\sqrt[ ]{2}}=\frac{3\sqrt[ ]{2}}{2}$，
所以所求弦长为$2\sqrt[ ]{5−(\frac{3\sqrt[ ]{2}}{2})^{2}}=\sqrt[ ]{2}$；5分
$(2)$由题设可知直线$l$的方程为$y=kx+1$
设$P(x\_{1},y\_{1})$，$Q(x\_{2},y\_{2})$，
将$y=kx+1$代入方程$(x−2)²+(y−3)²=1$，
整理得$(1+k^{2})x^{2}−4(1+k)x+7=0$，
所以$x\_{1}+x\_{2}=\frac{4(1+k)}{1+k^{2}}$，$x\_{1}⋅x\_{2}=\frac{7}{1+k^{2}}$，
$$y\_{1}⋅y\_{2}=(kx\_{1}+1)(kx\_{2}+1)=k^{2}x\_{1}x\_{2}+k(x\_{1}+x\_{2})+1=\frac{4k(1+k)−7}{1+k^{2}}+8$$

因为$\vec{OP}⋅\vec{OQ}=x\_{1}x\_{2}+y\_{1}y\_{2}=\frac{4k(1+k)}{1+k^{2}}+8=12$，
解得$k=1$，经检验，直线与圆有交点，
所以直线$l$的方程为$y=x+1$，
故圆心$C$在直线$l$上，所以$|\vec{PQ}|=2$． 7分

【解析】本题考查平面向量数量积的性质及其运算，考查弦长公式及其应用，考查运算能力，属于中档题．
$(1)$由题意知，两圆的方程相减可得公共弦所在直线方程，求得圆心$C′$到该直线的距离$d$，利用弦长公式可求得所求弦长；
$(2)$易知直线$l$的方程为$y=kx+1$，与圆$C$的方程联立，利用韦达定理及向量数量积的坐标运算，结合题意即可求得$|\vec{PQ}|.$

22.【答案】解：$(1)$由题意设圆心坐标为 $\left(0,b\right)(b>0)$ ，则圆$C$的方程为 $x^{2}+\left(y−b\right)^{2}=\frac{64}{9}(b>0)．$

因为直线 $12x−9y−1=0$ 与圆$C$相切，

所以点 $C\left(0,b\right)$ 到直线 $12x−9y−1=0$ 的距离 $d=\frac{\left|−9b−1\right|}{\sqrt[ ]{12^{2}+\left(−9\right)^{2}}}=\frac{8}{3}$ ，

因为 $b>0$ ，所以 $b=\frac{13}{3}$ ，
故圆$C$的标准方程为 $x^{2}+\left(y−\frac{13}{3}\right)^{2}=\frac{64}{9}．$3分

$(2)$假设存在定点$B$，设 $B\left(0,m\right)\left(m\ne −1\right)$ ， $P\left(x,y\right)$ ，

则 $x^{2}=\frac{64}{9}−\left(y−\frac{13}{3}\right)^{2}=−y^{2}+\frac{26}{3}y−\frac{35}{3}$ ，

则 $\frac{\left|PB\right|}{\left|PA\right|}=\frac{\sqrt[ ]{x^{2}+\left(y−m\right)^{2}}}{\sqrt[ ]{x^{2}+\left(y+1\right)^{2}}}=\frac{\sqrt[ ]{−y^{2}+\frac{26}{3}y−\frac{35}{3}+\left(y−m\right)^{2}}}{\sqrt[ ]{−y^{2}+\frac{26}{3}y−\frac{35}{3}+\left(y+1\right)^{2}}}=\sqrt[ ]{\frac{m^{2}−\frac{35}{3}+\left(\frac{26}{3}−2m\right)y}{−\frac{32}{3}+\frac{32}{3}y}}．$

当 $\frac{m^{2}−\frac{35}{3}}{−\frac{32}{3}}=\frac{\frac{26}{3}−2m}{\frac{32}{3}}>0$ ，即 $m=3$ $($ $m=−1$ 舍去$)$时，
 $\frac{\left|PB\right|}{\left|PA\right|}$ 为定值，且定值为 $\frac{1}{2}$ ，

故存在定点$B$，且$B$的坐标为 $\left(0,3\right)．$6分

$(3)$由$(2)$知 $\frac{|PB|}{|PA|}$ $=$ $\frac{1}{2}$ ，故 $\left|PB\right|$ $=$ $\frac{1}{2}$ $\left|PA\right|$ ，从而 $\frac{1}{2}$ $\left|PA\right|+\left|PD\right|$ $=$ $\left|PB\right|+\left|PD\right|$ ，

当且仅当 $P、B、D$ 三点共线时， $\left|PB\right|+\left|PD\right|$ 的值最小，且 $\left(\left|PB\right|+\left|PD\right|\right)\_{min}$ $=\left|BD\right|=5$ ．3分

【解析】本题考查圆的标准方程，点到圆上点的最值问题，属于拔高题．
$(1)$设圆$C$的方程为 $x^{2}+\left(y−b\right)^{2}=\frac{64}{9}(b>0)$ ，根据直线与圆相切可求解；

$(2)$设 $B\left(0,m\right)\left(m\ne −1\right)$ ， $P\left(x,y\right)$ ，利用两点距离公式可求得 $\frac{\left|PB\right|}{\left|PA\right|}=\sqrt[ ]{\frac{m^{2}−\frac{35}{3}+\left(\frac{26}{3}−2m\right)y}{−\frac{32}{3}+\frac{32}{3}y}}$ ，可知当 $\frac{m^{2}−\frac{35}{3}}{−\frac{32}{3}}=\frac{\frac{26}{3}−2m}{\frac{32}{3}}>0$ ， $\frac{\left|PB\right|}{\left|PA\right|}$ 为定值，从而可解；

$(3)$由$(2)$可知， $\frac{1}{2}$ $\left|PA\right|+\left|PD\right|$ $=$ $\left|PB\right|+\left|PD\right|$ ，当且仅当 $P、B、D$ 三点共线时， $\left|PB\right|+\left|PD\right|$ 的值最小，从而可解．