函数与方程思想在高中数学解题中的应用

曹旭辉(甘肃省武山县第二高级中学 741306)

【摘 要】 函数与方程虽然是两个不同的数学概念,但有着密切的关系,从高中数学角度分析,不等式、数列、几何等题型中都涉及函数或方程内容,因而函数与方程思想在解题方面发挥着重要作用.教师在教学中引导学生根据问题中的数量关系或是引入新的变量,来构建函数与方程,并应用其相关知识对问题进行分析和解答,能够化繁为简,化难为易,提高学生的推导能力与解题能力.

【关键词】 高中数学;函数;方程

1 函数与方程思想概述

函数与方程思想中涉及函数、方程两个不同的概念,二者看似毫无交集,实则却联系密切,如一个函数有解析表达式,则这表达式可以看作是一个方程,在转化中找到解决思路.

从数学角度分析,解题中运用函数思想,主要是利用运动和变化的观点,来深入分析其中的数量关系,结合建立的函数关系或构造函数,再运用函数图象和性质进行分析和转化,使问题加以解决.[1] 而方程思想则多是通过分析数学问题中的变量关系,而建立方程或是方程组,运用所学的方程知识来分析问题、解决问题.

两种思想在解题中运用时有着异曲同工之妙,但想要得出正确的结果,则要基于对二者的深刻认识,如果学生对函数思想和方程思想掌握不当,解题中则很难想到运用这两种思想,更是难以找到正确的解题思路.[2] 另外,学生对函数与方程思想的运用缺乏灵活性,为了保证学生解题能力的提升,教师应尽可能为学生创造实践机会,让学生在实践中加强对这种思想的理解,进而促进分析问题、解决问题能力的提升.综上所述,在高中数学教学中,教师应借助函数与方程思维来点拨和启发学生,帮助学生在解题中从大局观出发,灵活运用知识解决问题,加强对所学知识的融会贯通、举一反三,进而促进综合能力的发展.

2 函数与方程思想在高中数学解题中的具体应用

2.1 不等式中的函数与方程思想

学生在高中学习不等式相关知识时,由于已经有等式的相关基础,对概念性知识理解速度较快,但在实际解题中,却会因为对知识掌握不透彻而出现错误.尤其是当整个章节学习完之后,题型的综合性提高,涉及函数与方程等问题,更会为学生解题增加一定的难度.[3] 对此,教师在解题教学中应合理渗透函数与方程思想,将不等式求解问题转化为函数问题或方程问题,再通过求解得出正确答案.

2.1.1 构建函数求不等式解集

例1 设不等式 $2x-1>m(x-1)$,对满足 $-2\leqslant m\leqslant 2$ 的一切实数 m 的取值都成立,求 x 的取值范围.

本题考查的是二元一次不等式,且具有一定的综合性,部分学生在读题后无法正确解读其中的含义,从而解题思路受阻.教师在讲评时可以引入函数与方程思想,引导学生将其视为关于 m 的一次不等式再解决问题,因为 $2x-1>m(x-1)$,所以 $(x-1)m-(2x-1)<0$,当 $-2\leqslant m\leqslant 2$ 的时候恒成立,设 $f(m)=(x-1)m-(2x-1)$,通过简化得出 $f(2)<0$,$f(-2)<0$ 再代入不等式,即 $(x-1)\cdot 2-(2x-1)<0$,$(x-1)\cdot(-2)-(2x-1)<0$,解得 $x>\frac{3}{4}$,所以,x 的取值范围是 $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$.

值得注意的是,部分学生受到定式思维的影响,

在解决问题时非常容易将题目看成关于 x 的不等式，教师应积极引导学生转换角度，构建以 m 为变量的一次函数，结合题目中的条件列出函数式. 可以说这是对常规思维的突破与创新，解题过程也比传统解法更加简洁，突出了函数与方程思想的优势.[4]

2.1.2 利用函数性质求不等式解集

求不等式解集是高中数学学习中常见的问题，在测试和练习中多是以选择题的形式出现，部分学生在求解中从不等式角度出发展开分析，忽视了函数与方程思想的运用，导致解题时步骤复杂且错误频出. 对此，教师在讲解此类题型时，应积极引入函数与方程思想，引导学生利用函数的性质来解题.

例 2 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若对任意实数，都有 $2f(x)+xf'(x)<2$ 恒成立，则使 $x^2f(x)-f(1)<x^2-1$ 成立的 x 的取值范围为(　　)

(A) $\{x\mid x\neq\pm 1\}$.

(B) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(C) $(-1,1)$.

(D) $(-1,0)\cup(0,1)$.

在讲解此类题型时，教师应先鼓励学生尝试构建函数 $F(x)=x^2f(x)-x^2$，再根据题干信息，判断 $F(x)$ 为偶函数，再结合 $F(x)$ 的单调性求出解集，得出最终的答案.

具体解题步骤为：首先，教师应设 $F(x)=x^2f(x)-x^2$，因为 $f(x)$ 为偶函数，得出 $F(x)$ 也是偶函数，即 $F'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-2x=x[2f(x)+xf'(x)-2]$，结合题意可知 $2f(x)+xf'(x)-2<0$. 分为两种情况讨论，当 $x<0$ 时，$F(x)>0$；当 $x>0$ 时，$F(x)<0$. 由 $x^2f(x)-f(1)<x^2-1$，得出 $x^2f(x)-x^2<f(1)-1$，所以 $F(x)<F(1)$，即 $|x|>1$，x 的取值范围自然可以确定为 $x<-1$ 或 $x>1$.

2.2 数列中的函数与方程思想

函数与方程思想是数列学习中的“法宝”，在解题中教师引导学生将数列看作一种特殊函数，如等差数列可看作通项公式与前 n 项和公式都可看作关于 n 的函数. 通过合理的转化，将数列转化为蕴含函数思想的内容，再借助函数、方程等相关知识加以解决，能够有效降低解题的难度，起到化繁为简的效果.

例 3 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 是数列 a_n 的前 n 项和，已知 $S_7=7$，$S_{15}=75$，T_n 为数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和，求 T_n.

学生在阅读题目后第一时间想到用等差数列公式解题，这一思路是正确的，但等差数列的首项和公差都是未知的，教师可以引导学生根据已知条件列出方程.

具体步骤为：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则有 $\begin{cases}S_7=7a_1+21d=7,\\ S_{15}=15a_1+105d=75,\end{cases}$ 借助代入法解方程，可得 $a_1=-2$，$d=1$. 将得出的结果代入 $\frac{S_n}{n}$，可得 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{1}{2}(n-1)d=-2+\frac{1}{2}(n-1)$，又因为 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}$，所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也是等差数列，且首项为 -2，公差为 $\frac{1}{2}$，即 $T_n=\frac{1}{4}n^2-\frac{9}{4}n$.

基于此，解题结束后教师应组织学生重新梳理解题思维，学生发现数列与函数之间有着密切的联系，如本题本质上就是定义域为 $\mathbf{N}$ 的函数值列，如果将数列的通项公式设为 $a_n=f(n)$，则前 n 项和公式 $S_n=g(n)$，解题过程实质上就是函数解析式. 由此，学生不仅可以在解题中加强对函数与方程思想的运用，还可以在分析和归纳中强化数列与函数之间关系的掌握.

2.3 几何中的函数与方程思想

几何分为解析几何、立体几何两个部分，相关题型一直是学生高中数学学习中的难点，尤其是部分空间思维能力较差的学生，在解题中总是会遇到很多困难. 而将函数与方程思想运用在几何解题过程中，把字母看作变量或是将代数式看作函数，合理转化下题目条件会变得更加简单，学生的解题思路也

会更加清晰.

2.3.1 解析几何中的函数与方程思想

解析几何是高中数学中的一大难点,解题中经常需要引入一些相互联系、相互制约的变量,通过分析变量之间的关系来构建函数或方程关系.如解析几何中较为常见的轨迹问题、最值与取值范围、定点定值问题等,都可以运用函数与方程思想解答,这也是近几年高考的热点问题.

例如 以求解"椭圆"问题为例,教师在指导学生用函数与方程思想解题时,可以设计相关习题,引导学生转换思维,多角度寻找解题思路.

例4 如果曲线$|y|=2^x+1$与直线$y=b$没有交点,求b的取值范围.

部分学生在初次审题后毫无解题思路,教师可以启发学生思维,鼓励其从方程的角度出发进行解题,并借助图象直观分析二者之间的关系.在教师的引导下,学生可以将曲线$|y|=2^x+1$和$y=b$的图象简单地画出来,通过观察发现曲线$|y|=2^x+1$的图象关于x轴对称,$|y|>1$,且图象过定点$(0,2)$,$(0,-2)$,因此只有当$-1\leqslant b\leqslant 1$时,曲线$|y|=2^x+1$与直线$y=b$才能没有交点.而运用函数与方程思想解题时,教师还可以鼓励学生结合函数公式转化为方程公式求解,以拓展学生思维并降低解题难度.

2.4 方程中的函数与方程思想

例5 已知$mx^2+x+1=0$有且只有一个根在区间$(0,1)$内,求m的取值范围.

部分学生在阅读题目后,通过围绕"只有一根"这一关键词展开分析,将方程设为$f(x)=mx^2+x+1$,再运用二分法认为函数$f(x)$中,如果$f(a)\cdot f(b)<0$,那么函数$y=f(x)$在区间(a,b)上至少存在一个零点,但不一定唯一.而对于二次函数$f(x)$,如果$f(a)\cdot f(b)<0$,则在区间(a,b)上则存在唯一的零点.但却忽视了方程$f(x)=0$时,在区间(a,b)上有且只有一个根时,不仅存在$f(a)\cdot f(b)<0$一种可能,当$f(a)\cdot f(b)=0$时,结论也是成立的.对此,教师应引导学生绘图函数$f(x)$在x轴上的图象,运用函数与方程思想分析问题,有序罗列解题中的多种情况,再分析情况讨论,具体解题步骤为:先设$f(x)=mx^2+x+1$.第一种情况,当$m=0$时,方程的根为-1,与题设条件相悖,应舍弃这一答案;第二种情况,当$m\neq 0$时,因$mx^2+x+1=0$有且只有一个根在区间$(0,1)$内,且$f(0)=1>0$,又可以细分为两种情况,当$f(1)<0$时,代入公式得$m<-2$,当$f(1)=0$时,代入公式得$m=-2$,再代入原方程发现不符合题意,综上可得$m<-2$.

基于此,学生在教师的带领下,在求方程根问题时运用函数与方程思想,先构造函数将方程问题转化为函数思想再去解决,降低了求解难度的同时锻炼了学生的思维能力和解题能力.同时,二分法本质上就是函数与方程思想的重要体现,教师还可以设计类似题目来锻炼学生对二分法的应用,以加强对二分法意义和用法的掌握.

3 结语

总的来说,为了提高学生的数学解题能力,教师应在教学中积极渗透函数与方程思想,引导学生以动态的思维,用函数、变量的观念去思考问题,运用代数、消元等思想将未知问题转化为已知.在实际教学中,教师还要设计多样的题型来引导学生训练,以加强对这种解题思想的掌握,并在练习中不断分析和推导,以提高思维的灵活性,真正落实学以致用.

参考文献:

[1] 张宏斌.浅谈函数思想在高中数学解题中的应用[J].数理化解题研究,2022(18):26-28.

[2] 汤琴.函数思想在高中数学解题中的应用[J].数学学习与研究,2021(01):148-149.

[3] 杨同.才函数思想在高中数学解题中的应用[J].中学数学,2020(17):33-34.

[4] 王鹏.函数思想在高中数学解题中的应用[J].数理化解题研究,2020(22):51-52.

[5] 杨娟娟.函数与方程思想在高中数学解题的有效应用[J].高考,2020(17):33.