高中数学常见的思想方法在函数解题中的应用

于佳淼

【摘要】文章主要阐述了分类讨论的思想方法、数形结合的思想方法、特殊与一般的思想方法、转化与化归的思想方法、函数与方程的思想方法、整体的思想方法、数学建模的思想方法及对称的思想方法在函数解题中的应用，希望能为广大一线数学教师提供一定的参考。

【关键词】高中数学；思想方法；函数解题

作者简介：于佳淼（1998.11—），女，吉林师范大学，研究生在读。

一、前言

数学是发展学生抽象思维和逻辑思维能力的重要科目。在解决数学问题的过程中，学生能主动地思考问题，提高自身的创新能力、实践能力和全面掌握知识的能力。解决数学问题关键是要掌握数学思想方法，并在解题的过程中灵活运用，以加深对知识的理解。本文主要阐述了在函数解题中的常用数学思想方法，并举例进行说明。

二、分类讨论的思想方法

分类讨论思想的应用是许多学生的薄弱之处，但分类讨论思想又是数学学习的重点和难点。分类讨论思想在不等式、函数、解析几何、立体几何、数列、排列组合、概率等问题求解中应用十分广泛。

例1：已知实数$a\neq 0$，函数$f(x)=\begin{cases}2x+a, x<1\\ -x-2a, x\geqslant 1\end{cases}$，若$f(1-a)=f(1+a)$，则$a$的值为多少？

解：由$a\neq 0$可知，$a>0$或$a<0$.

当$a>0$时，$1-a<1<1+a$，由$f(1-a)=f(1+a)$可知$2(1-a)+a=-(1+a)-2a$，解得$a=-\frac{3}{2}$，由于$-\frac{3}{2}<0$，所以不符合题意，舍去；

当$a<0$时，$1+a<1<1-a$，由$f(1-a)=f(1+a)$可知$2(1+a)+a=-(1-a)-2a$，解得$a=-\frac{3}{4}$，由于$-\frac{3}{4}<0$，所以符合题意.

综上，$a=-\frac{3}{4}$.

三、数形结合的思想方法

数形结合思想是一种以“形”直观表达数，以“数”抽象探究形的思想方法[1]。在函数问题中，利用数形结合的思想方法来解决方程根的个数的问题是一类常见的问题。

例2：已知$x\in R, m\in R$，讨论方程$|x^2-2x-3|=m$的根的个数。

解：首先将问题转化成函数$f(x)=|x^2-2x-3|$的图像与直线$g(x)=m$的图像的交点个数问题，然后求解。

画出函数$f(x)=|x^2-2x-3|$的图像，如图1所示。

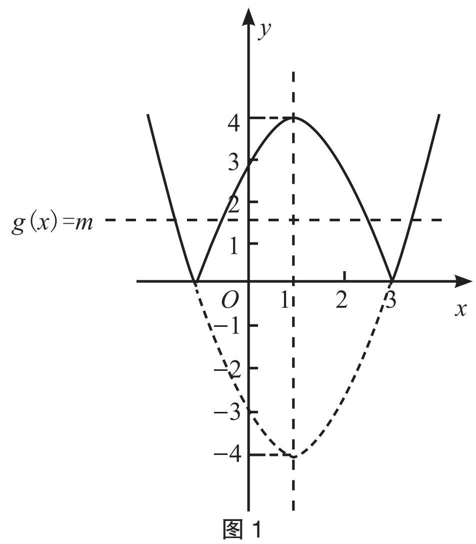

图 1

由图像易知：

当$m<0$时，函数$f(x)=|x^2-2x-3|$的图像与直线$g(x)=m$无交点；当$m=0$或$m>4$时，函数$f(x)=|x^2-2x-3|$的图像与直线$g(x)=m$有2个交点；

当$0<m<4$时，函数$f(x)=|x^2-2x-3|$的图像与直线$g(x)=m$有4个交点；

当$m=4$时，函数$f(x)=|x^2-2x-3|$的图像与直线$g(x)=m$有3个交点。

综上，当$m<0$时，原方程无解；当$m=0$或$m>4$时，原方程有2个根；

当$0<m<4$时，原方程有4个根；当$m=4$时，原方程有3个根。

四、特殊与一般的思想方法

在函数的学习中，特殊与一般的思想方法常常会应用在对题目中x或y这种自变量的赋值上，对自变量赋予特殊值会使问题变得简单明了[2]。

例3：已知函数$f(x)$不恒为0，$x\in R$. 若对于任意实数x_1，x_2都有$f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2f(x_1)f(x_2)$. 求证：$f(x)$为偶函数.

证明：函数$f(x)$的定义域为R.

令$x_1=0$，$x_2=x$，则$f(x)+f(-x)=2f(0)f(x)$.

再令$x_1=x$，$x_2=0$，则$f(x)+f(x)=2f(0)f(x)$.

联立上述两式可知：$f(x)=f(-x)$，所以$f(x)$是偶函数。

又如，所给的函数方程有两个变量时，可对这两个变量交替使用特殊值代入，或使这两个变量相等代入，再利用已知条件，可求出未知的函数，至于取什么特殊值，就要根据题目特征来确定了。

五、转化与化归的思想方法

转化与化归的思想方法是将待研究的问题进行转化，转化为简单的问题，再通过解决转化后的问题去解决转化前的问题的思想方法。在数学学习中，化归思想方法几乎伴随着所有的问题解决，能将复杂的问题简单化，将抽象的问题直观化。三角函数的概念比较抽象，学生学习起来比较困难，因此在三角函数中，转化与化归的思想方法经常会被用到[3]。

例4：已知锐角α满足$\tan\alpha=3$，求下列各式的值：

（1）$\dfrac{\sin\alpha-4\cos\alpha}{5\sin\alpha+2\cos\alpha}$；

（2）$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha$.

解：（1）$\dfrac{\sin\alpha-4\cos\alpha}{5\sin\alpha+2\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha-4}{5\tan\alpha+2}=\dfrac{3-4}{5\times3+2}=-\dfrac{1}{17}$.

（2）$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha$.

$=\dfrac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha}{1}$

$=\dfrac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{\tan^2\alpha+2\tan\alpha-3}{\tan^2\alpha+1}$

$=\dfrac{3^2+2\times3-3}{3^2+1}$

$=\dfrac{6}{5}$.

解题时利用$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，将各项中的分子、分母转化成$\tan\alpha$的代数式，运用了转化与化归的思想方法。

六、函数与方程的思想方法

函数思想几乎贯穿了高中数学代数部分的全部内容，是数学思想方法的重点内容之一。函数与方程的思想方法在高中数学学习中也是常常会运用到的。比如，在三角函数的变换求值问题中，已知$\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$中的任意一个值，再利用函数与方程的思想方法，就能够求出另外两个值。

例5：已知$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，求$\sin\alpha\cos\alpha$与$\sin\alpha-\cos\alpha$的值。

解：由$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，得$1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{25}$，即$2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{24}{25}$，

即$\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{12}{25}$. 令$\sin\alpha-\cos\alpha=M$，则$1-2\sin\alpha\cos\alpha=M^2$. 即$1+\dfrac{24}{25}=M^2$，解得$M=\pm\dfrac{7}{5}$. 综上$\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{12}{25}$，$\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\dfrac{7}{5}$.

七、整体的思想方法

整体思想是指从整体的结构出发，整体把握问题内部各要素之间的联系，从而实现快速解题的一种思想方法。在化简三角函数式的多项式运算中，学生可以利用整体的思想来巧妙求解。应用整体的思想方法来解题，能简化计算过程，减少计算量，降低解题难度[4]。

例6：化简$\sin^2\alpha\tan\alpha+\dfrac{\cos^2\alpha}{\tan\alpha}+2\sin\alpha\cos\alpha$.

解：$\sin^2\alpha\tan\alpha+\dfrac{\cos^2\alpha}{\tan\alpha}+2\sin\alpha\cos\alpha$

$=\sin^2\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\cos^2\alpha\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+2\sin\alpha\cos\alpha$

$=\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$

$=\dfrac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

八、数学建模的思想方法

数学建模是数学的基本思想之一。函数部分中涉及的数学建模内容是函数模型的应用，即选择合适的数学模型表达所要解决的数学问题，能够在综合的情境中，运用数学建模的一般方法和相关知识，创造性地建立数学模型，进而解决问题。

例7：某商场在劳动节期间开展某商品的促销活动，该商品每件的进价为80元，销售价为120元，当一次购买超过100件时，每多购1件，所购的全部商品的单价就降低0.1元，但最低购买不能低于100元。

（1）当一次购买量至少为多少件时，每件商品的实际购买价为100元？

（2）当一次购买量为x件时，每件商品的实际购买价为y元，写出$y=f(x)$的表达式；

（3）在顾客一次购买量不超过300件的情况下，求使商场获得最大利润的购买量及最大利润。

解：（1）设一次购买量为$100+n(n\in N)$件，

则批发价为$120-0.1n$，令$120-0.1n=100$，

所以，$n=200$，$100+200=300$，

即当一次购买量至少为300件时，每件商品的实际购买价为100元。

（2）由题意知：

$$y=f(x)=\begin{cases}120,0\leqslant x\leqslant 100,x\in N\\120-0.1(x-100),100<x\leqslant 300,x\in N\end{cases}$$

（3）当顾客一次购买量为x件时，该商场可获得利润为y，根据题意可知

$$y=\begin{cases}40x,0\leqslant x\leqslant 100,x\in N\\ [40-0.1(x-100)]x,100<x\leqslant 300,x\in N\end{cases}$$

设$f_1(x)=40x$，当$x=100$时，取得最大值为4000；

设$f_2(x)=-0.1x^2+50x=-0.1(x-250)^2+0.1\times 250^2$，

所以当$x=250$时，$f_2(x)$取得最大值6250。

答：当顾客一次购买量为250件时，该商场可获得最大利润6250元。

九、对称的思想方法

对称的思想方法在函数中应用有很多，如函数的奇偶性，函数图像关于原点与y轴对称；在二次函数中，二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图像关于直线$-\frac{b}{2a}$对称；互为反函数的两个函数，函数图像关于直线$y=x$对称[5]。教师可引导学生充分运用对称思想，巧妙地解决函数问题。

例8：设$f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数，且$f(x)+g(x)=x^2+2x$，则函数$f(x)$，$g(x)$的解析式分别是什么？

解：因为$f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数，

所以$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$.

由$f(x)+g(x)=x^2+2x$，①

用$-x$代替x得$f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)=(-x)^2-2x$，

所以，$f(x)-g(x)=x^2-2x$，②

（①+②）÷2，得$f(x)=x^2$；（①-②）÷2，得$g(x)=2x$.

十、结语

总之，教师在教学中应注重数学思想方法的渗透，以帮助学生掌握更多的数学思想方法，顺利解答数学问题，进而提高学生的数学学习能力和数学知识应用能力[6]。

【参考文献】

［1］刘燕．数形结合思想在初中数学教学中的渗透研究［J］．试题与研究，2021（29）：77-78.

［2］庞景红．论数学思想在高中数学解题中的应用［J］．教育现代化，2018，5（27）：368-369.

［3］王婧．关于转化思想方法在高中数学解题中的应用探讨［J］．名师在线，2021，174（29）：23-24.

［4］王立嘉．整体思想在高中数学解题中的应用［J］．中学数学教学参考，2021，815（09）：37-39.

［5］罗金东．对称思想方法在高中数学中的应用［J］．玉溪师范学院学报，2013，29（12）：57-61.

［6］韩军．数学思想方法在数学解题中的应用［J］．高考，2020，368（17）：27.