高三一轮复习课的问题设计要体现“四性”

——以“平面向量数量积的求法”为例

李红春 龚大晖

(武汉市黄陂区第一中学盘龙校区,430312)(武汉市江岸区中学教研室,430016)

摘 要:本文以一节“平面向量数量积的求法”展示课为例,通过展示四个教学片段,分析了问题设计的意图,提出高三一轮复习的问题设计要体现联系性、针对性、综合性和拓展性.

关键词:数学教学;一轮复习;问题设计;四性

数学教学过程本质上就是提出问题和解决问题的过程,数学教学应该以问题为中心.高三一轮复习承载着查漏补缺、夯实基础、构建知识网络、形成基本解题能力的重任,我们的课堂要以问题为中心,精心设计体现联系性、针对性、综合性和拓展性的问题,提升课堂的有效性.

在前不久武汉市高三数学一轮复习研讨活动中,笔者执教了一节“平面向量数量积的求法”展示课,获得了专家的一致好评.本文呈现这节课的主要教学片段,剖析问题设计在高三一轮复习过程中的价值,希望能对大家有所启发.

1.教学片断回顾

【片段1】

问题1 已知平面上三点A,B,C满足$|\overrightarrow{AB}|=3$,$|\overrightarrow{BC}|=4$,$|\overrightarrow{CA}|=5$,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$的值为________.

设计意图 复习平面向量数量积的定义、几何意义、坐标运算、运算法则.

生1:观察到3,4,5是一组勾股数,可知$\angle ABC$为直角,$\cos C=\frac{4}{5}$,$\cos A=\frac{3}{5}$,于是可得

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=0+4\times5\times\cos(\pi-C)+5\times3\times\cos(\pi-A)$$
$$=-20\cos C-15\cos A=-20\times\frac{4}{5}-15\times\frac{3}{5}$$
$$=-25.$$

师:从解题过程来看,生1运用了平面向量数量积的定义,特别注意了两个向量的夹角,完成得非常好.

生2:由条件知$\angle ABC$为直角,以B为坐标原点、AB所在直线为x轴,BC所在直线为y轴,建立平面直角坐标系,则$A(3,0)$,$B(0,0)$,$C(0,4)$,$\overrightarrow{AB}=(-3,0)$,$\overrightarrow{BC}=(0,4)$,$\overrightarrow{CA}=(3,-4)$,所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=(-3)\times0+0\times4+0\times3+4\times(-4)+3\times(-3)+(-4)\times0$$
$$=-25.$$

师:生2采用了坐标法,引入平面直角坐标系,利用向量的坐标进行运算.我们还能不能从“形”的角度找到突破口呢?

生3:$\overrightarrow{CA}$在$\overrightarrow{CB}$上的投影为数量CB,$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影为数量AB,因此

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=0-|\overrightarrow{CB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=0-4^2-3^2=-25.$$

师:生3采用了向量数量积的几何意义,注意到向量$\overrightarrow{CA}$在$\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{AB}$上的投影为数量,非常简洁地解决了这个问题,体现了数形结合的思想.

生4:由条件知$\angle ABC$为直角,所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=0+\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}^2$$
$$=-25.$$

师:此法采用数量积的运算法则,一步到位解决问题.继续观察式子的特点,三个向量首尾相连,轮换对称相加,大家还能想到什么方法吗?

生5:因为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$,将其两边平方可得

$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB})=0,$$

故$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$

$$=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2)=-25.$$

师:非常好,利用首尾相连封闭向量链的和为零向量的性质,结合本题式子的结构特点,巧妙地计算出数量积.

【片段2】

问题2　如图1,在$\triangle ABC$中,M是BC的中点,$AM=3$,$BC=10$,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ________.

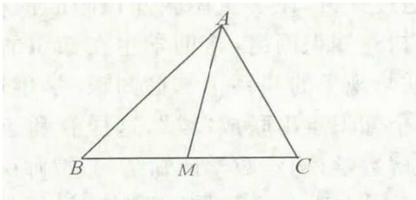


图1

设计意图　巩固求向量数量积的两种方法——“基底运算”和“坐标法”.

教师引导,探究本题的两种基本解法.

生6:因为M是BC的中点,所以$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,又$2\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,所以

$4\overrightarrow{AM}^2-4\overrightarrow{CM}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2$,

即$4\times 9-4\times 25=4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$,故

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-16$.

师:此解法结合了图形特点,以$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$为基底,列出两个等式,平方相减后产生$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$,解方程得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.显然$B$,$C$两点关于点$M$对称,我们可否利用这个特点建立平面直角坐标系来解决问题呢?

生7:以M点为坐标原点、BC所在直线为x轴建立平面直角坐标系,则$B(-5,0)$,$C(5,0)$.

设$A(x,y)$,由$|AM|=3$得$x^2+y^2=9$.

又$\overrightarrow{AB}=(-5-x,-y)$,$\overrightarrow{AC}=(5-x,-y)$,所以

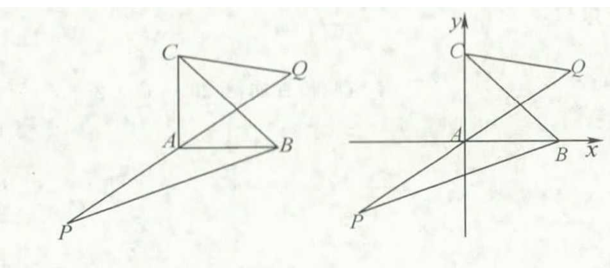
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-5-x)\cdot(5-x)+(-y)^2$

$=x^2+y^2-25=9-25=-16$.

师:以上设坐标求解的方法体现了设而不求的思想.基底法与坐标法是解决平面向量问题的两种基本方法,大家可以根据题目的特点选择最适宜的方法.

【片段3】

问题3　如图2,在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,已知$BC=a$,若长为$2a$的线段PQ以点A为中点,问$\overrightarrow{PQ}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角θ取何值时,$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$的值最大?并求出这个最大值.



设计意图　强化函数思想、转化与化归思想的运用.

师:题目只给了一个垂直条件及两条动直线的长度,求两个平面向量数量积的最大值及取最值的条件,难度较大,不易上手,大家不妨对比问题2,以平面向量的两个基本方法为出发点,尝试探究解决问题的突破口.

几分钟后,两位学生分别给出了如下两种解法.

生8:因为$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

因为$\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AQ}$,$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}$,所以

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=-a^2-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$

$=-a^2-\overrightarrow{AP}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=-a^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}=-a^2+a^2\cos\theta$,

故当$\cos\theta=1$,即$\theta=0$时,$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$最大,最大值为0.

生9:以A为坐标原点,AB、AC所在直线为坐标轴建立如图3所示的平面直角坐标系,则$A(0,0)$.

设$|AB|=c$,$|AC|=b$,则$B(c,0)$,$C(0,b)$,$b^2+c^2=a^2$.

设$P(x,y)$,则$Q(-x,-y)$,$x^2+y^2=a^2$,于是$\overrightarrow{BP}=(x-c,y)$,$\overrightarrow{CQ}=(-x,-y-b)$,$\overrightarrow{BC}=(-c,b)$,$\overrightarrow{PQ}=(-2x,-2y)$,所以

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=(x-c)\cdot(-x)+y\cdot(-y-b)$

$=-(x^2+y^2)+cx-by=-a^2+cx-by$.

因为$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{cx-by}{a^2}$,所以$cx-by=a^2\cos\theta$,所以$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=-a^2+a^2\cos\theta$.

故当$\cos\theta=1$,即$\theta=0$时,$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$最大,最大值为0.

师:在得到数量积的表达式$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=-a^2+cx-by$后,我们能否用不等式求解呢?

由柯西不等式可得

$cx-by\leqslant\sqrt{c^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+(-y)^2}=a^2$,

所以$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=-a^2+cx-by\leqslant -a^2+a^2=0$,当且仅当$cy=-bx$时等号成立.

又$\overrightarrow{PQ}=(2x,2y)$,$\overrightarrow{BC}=(-c,b)$,也即$\overrightarrow{PQ}$与$\overrightarrow{BC}$同向共线,即$\theta=0$时,$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CQ}$最大,最大值为0.

第一种解法利用向量自身的符号优势,采用基底法,体现了转化与化归的数学思想.第二种解法采

用坐标法,利用平面向量数量积的坐标表示,体现了函数思想与数形结合思想.利用柯西不等式求$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$的最值,特别要注意等号成立的条件.

【片段4】

PPT展示课后探究试题:

问题4 点M为$\triangle ABC$内一点,且满足$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,$O$为$\triangle ABC$的外心,已知$A=60°$,$BC=2$,则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}$的最大值是________.

设计意图 打破课堂时空局限,让学有余力的学生课后钻研.

解析 设$\triangle ABC$中角A,B,C的对边长分别为a,b,c,由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$,把已知条件代入得$b^2+c^2-bc=4$.

由$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$得$\overrightarrow{MA}+3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\mathbf{0}$,整理得

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

结合投影的定义可得:

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{c}{2}+\frac{1}{3}\cdot b\cdot\frac{b}{2}=\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{6}b^2$$

$$=\frac{4(\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{6}b^2)}{b^2+c^2-bc}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2b^2+3c^2}{b^2+c^2-bc}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2+3(\frac{c}{b})^2}{1+(\frac{c}{b})^2-\frac{c}{b}}.$$

设$\frac{c}{b}=t$,$t>0$,记$g(t)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3t^2+2}{t^2-t+1}=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3t-1}{t^2-t+1}$,再设$3t-1=m$,则

$$g(t)=u(m)=1+\frac{3m}{m^2-m+7}.$$

注意到$m>-1$,要$u(m)$最大,显然$m>0$,从而可得

$$u(m)\leqslant 1+\frac{3}{m+\frac{7}{m}-1}$$

$$\leqslant 1+\frac{3}{2\sqrt{7}-1}=\frac{2\sqrt{7}+10}{9}.$$

等号成立的条件是$m=\sqrt{7}$,对应的$t=\frac{1}{3}(\sqrt{7}+1)$,即$\frac{c}{b}=\frac{1}{3}(\sqrt{7}+1)$.

所以,$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}$的最大值为$\frac{2\sqrt{7}+10}{9}$.

2.教学感悟

2.1 起始环节问题设计要体现联系性

起始环节的问题要立足基础,激发学生的参与意识,通过探讨,让学生体验知识间的内在联系,从而有效构建知识网络,帮助学生在知识的整体与局部、本质与现象的联系中掌握知识.学生通过练习,能把各个知识点串联成“线”,这样有利于学生从整体上理解数学,构建数学认知结构.教师引导学生采用5种不同方法求解问题1,系统回顾了处理数量积问题的基本方法和基本技能,整合了知识与方法.

2.2 中关环节问题设计重在体现针对性

课堂教学的针对性包括:问题设计能否体现课程标准的基本要求;问题选取能否突出高考的主干知识和热点内容;课堂讲解能否侧重学生能力的薄弱环节.中关环节,学生已经渐入佳境,进入了学习的最佳状态,这一阶段要突出教学的重点.在平面向量数量积这一问题中,基底法和坐标法毋庸置疑是两种最重要的方法,是本节课的重点,问题2的设置就有针对性地突出了这两种方法.

2.3 收官环节问题设计要体现综合性

收官环节,也就是一节课教学的落点,“低起高落”是我们课堂教学追求的方向.综合性是高考试题的一大特点,复习课最现实的目的就是为了应对高考.在复习过程中,通过引入一些高考真题,引导学生和命题人对话,在问题解决中形成真挚的情感体验,提升解决综合问题的能力.问题3是一道湖北省高考真题,比较经典,求解过程中要求学生灵活运用函数、三角、不等式等知识,渗透了数形结合、等价与化归等数学思想.当然,综合性试题比较难,处理时不可能一蹴而就,这就需要为学生搭好“脚手架”,本节课中问题2的设置便为问题3埋下了伏笔.

2.4 课后环节问题设计要体现拓展性

由于学生自身的知识水平和认知结构的不同,在学习过程中存在个体差异,特别是到了复习阶段,这种差异就更加明显,课后习题设计要努力弥补这一不足.本节课中,问题4的设计打破复习课在时间和空间上的局限性,让学有余力的学生能够在课后充分发展自己的能力.这正如苏霍姆林斯基所说:教给学生借助已有知识去获取新知识,这是最高的教学技巧.

(收稿日期:2020—08—25)