

例谈函数与方程思想在高中解题中的应用

甘肃省秦安县第二中学

(741600)

罗文军

函数知识是高中数学的主干知识,函数与方程思想是高考考查的重要思想方法之一.函数思想是指根据题目结论的需要,结合条件信息构造相应的函数,通过函数关系,利用函数知识或函数的观点观察、分析、转化和解决问题的思想.方程思想,是将问题要素之间的各种关系转化为方程(组),然后通过解方程(组)来获得问题的解决.在许多高中数学综合性问题中,会将函数思想与方程思想结合起来考查.以下将函数与方程思想的考查题型进行了归类总结.

一、充分必要条件中的函数与方程思想

充分必要条件中函数与方程思想的考查主要体现在:以指数函数、对数函数、幂函数、正弦函数和余弦函数等五种基本初等函数的单调性等性质为依托,考查充分必要条件的定义.

例1 (2022年百师联盟全国联考)若 $0 < a < 1$,则“ $\log_a b < \log_a c$ ”是“ $b > c$ ”的().

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

解析 由对数函数的知识,由 $0 < a < 1$ 知, $\log_a b < \log_a c \Leftrightarrow b > c > 0$,故选A.

评注 利用对数函数的单调性,得出 $0 < a < 1$ 时, $\log_a b < \log_a c \Leftrightarrow b > c > 0$,再根据充分必要条件的定义可以判断,体现了函数思想.

二、函数与导数中的函数与方程思想

函数与导数部分,函数与方程思想的考查,通常以下面内容的考查为依托:(1)比较数值的大小问题,抓住题目结构特征,通过巧构适当的函数,利用函数的单调性比较大小;(2)从已知条件中,抽象出奇函数模型,利用奇函数的性质求值;(3)极值点偏移问题中,由题设条件出发,建立方程组,运用加减消元思想,消去参数,再运用比值代换法或者差值代换法后,构造函数解答;(4)方程 $f(x) = 0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 有零点;(5)求参数范围问题时,分离参数构建函数,将方程有解转化为求函数的值域.

例2 (河北衡水中学2022届上学期高三模

考)正实数 a, b, c 满足 $a + \sin a = 2, b + 3^b = 3, c + \log_4 c = 4$,则实数 a, b, c 之间的大小关系为().

- A. $b < a < c$
- B. $a < b < c$
- C. $a < c < b$
- D. $b < c < a$

解析 由 $a + \sin a = 2$,得 $\sin a = 2 - a$,因为 $-1 \leq \sin a \leq 1$,所以 $-1 \leq 2 - a \leq 1$,得 $1 \leq a \leq 3$,设函数 $f(x) = x + 3^x$,则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,且 $f(0) = 1, f(1) = 4$,所以由 $b + 3^b = 3$,即 $f(b) = 3$,可得 $0 < b < 1$,函数 $g(x) = x + \log_4 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,且 $g(3) = 3 + \log_4 3 < 4, g(4) = 4 + \log_4 4 = 5$,由 $c + \log_4 c = 4$,即 $g(c) = 4$,所以 $3 < c < 4$,所以 $b < a < c$,故选A.

评注 这是一道比较数值大小的问题,函数与方程思想的运用体现在:①利用正弦函数的值域得出 a 的范围;②构造函数 $f(x) = x + 3^x$,由该函数单调性得出 b 的范围;③构造函数 $g(x) = x + \log_4 x$,由 $g(x)$ 的单调性得出 c 的范围.

例3 (2022年甘肃兰州高三模考)设 x, y 是实数,且满足 $\begin{cases} (x-1)^3 + 2015(x-1) = -1 \\ (y-1)^3 + 2015(y-1) = 1 \end{cases}$,则 $x + y =$ _____.

解析 构造函数 $f(t) = t^3 + 2015t$,这是一个奇函数,由已知得 $f(x-1) = -1, f(y-1) = 1$,所以 $f(x-1) + f(y-1) = 0$,所以 $(x-1) + (y-1) = 0$,所以 $x + y = 2$.

评注 题设条件是二元三次方程组形式,通过观察式子结构特征,抽象出函数模型 $f(t) = t^3 + 2015t$,运用奇函数定义判断函数 $f(t)$ 为奇函数,再根据奇函数的性质:函数值互为相反数则对应的自变量互为相反数,从而得出 $x + y$ 的值.

三、解析几何中的函数与方程思想

解析几何问题中函数与方程思想的考查主要有:(1)运用待定系数法求圆锥曲线的方程,通常运用了一元一次方程或者三元二次方程组思想;(2)判断直线与圆锥曲线的位置关系、求弦长和中点弦问题,经常要把直线方程和圆锥曲线方程联立消元,运用方程的理论加以解决;(3)圆锥曲线的最值问题,通常最后整体换元后,运用二次函数、对勾型函数或者三次函数的知识解答.

例4 (2022年百师联盟全国联考) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 B 为椭圆短轴的一个端点, 且 $\overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BF_2} = 0$, $|\overrightarrow{BF_1} + \overrightarrow{BF_2}| = 2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 直线 $l: \sqrt{2}x - 2y = 0$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点, P, Q 为 C 上两点, 且直线 $PQ \parallel MN$, 求四边形 $MNPQ$ 面积的最大值.

解析 (1) 由 $\overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BF_2} = 0$ 得 $b = c$ ①

由 $|\overrightarrow{BF_1} + \overrightarrow{BF_2}| = 2\sqrt{2} = 2b$, 得 $b = \sqrt{2}$ ②

又因为 $a^2 = b^2 + c^2$ ③

由①②③解得 $a^2 = 4, b^2 = 2$, 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 联立 $\begin{cases} \sqrt{2}x - 2y = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -1 \end{cases}$,

不妨取 $M(\sqrt{2}, 1), N(-\sqrt{2}, -1)$,

所以 $|MN| = 2\sqrt{3}$,

设直线 $PQ: y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + m (m \neq 0)$,

联立 $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$,

得 $x^2 + \sqrt{2}mx + m^2 - 2 = 0$,

由 $\Delta = 2m^2 - 4(m^2 - 2) > 0$,

得 $m^2 < 4$,

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = -\sqrt{2}m, x_1x_2 = m^2 - 2$,

所以 $|PQ| = \sqrt{\frac{3}{2}}|x_1 - x_2|$

$= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{12 - 3m^2}$,

由题知四边形 $MNPQ$ 为梯形, 又平行线 MN 与 PQ 之间的距离即原点 O 到 PQ 的距离 d 为梯形的高

$d = \frac{2|m|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}|m|}{3}$,

所以四边形 $MNPQ$ 的面积

$S = \frac{1}{2}(|MN| + |PQ|) \cdot d$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}|m| \cdot (2 + \sqrt{4 - m^2})$,

设 $t = \sqrt{4 - m^2} (0 < t < 2)$, 则

$S^2 = \frac{1}{2}(4 - t^2)(2 + t)^2$

$= -\frac{1}{2}t^4 - 2t^3 + 8t + 8$,

设 $f(t) = -\frac{1}{2}t^4 - 2t^3 + 8t + 8$, 则

$f'(t) = -2t^3 - 6t^2 + 8 = -2(t - 1)(t^2 + 4t + 4)$

易知当 $0 < t < 1$ 时 $f'(t) > 0$, $f(t)$ 单调递增, 当 $1 < t < 2$ 时 $f'(t) < 0$, $f(t)$ 单调递减,

所以当 $t = 1$ 时 $f(t)$ 取得最大值 $f(1) = \frac{27}{2}$,

所以四边形 $MNPQ$ 的面积 S 的最大值为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

评注 本题第(1)问运用了待定系数法, 体现了三元二次方程组思想的应用; 第(2)问中, 通过解二元二次方程组求得点 M 和点 N 的坐标, 表示弦长 $|PQ|$ 时, 联立直线 PQ 方程和椭圆方程消元的过程运用了方程思想; 表示出四边形 $MNPQ$ 的面积后, 整体换元得到一个关于 t 的四次函数, t 的范围的确定体现了“定义域优先”的函数思想, 运用函数与导数的知识得出 $f(t)$ 的最大值, 从而得出四边形 $MNPQ$ 的面积的最大值.

例5 (2022届陕西宝鸡调研考试) 设 A 是椭圆 $C: x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右顶点, 点 M 在 C 上, 则 $|AM|$ 的最大值为().

A. $\frac{9}{2}$ B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

解析 设点 $M(x_0, y_0)$, 点 M 在 C 上, 则 $x_0^2 + \frac{y_0^2}{3} = 1$, 即 $y_0^2 = 3 - 3x_0^2$,

因为 A 是椭圆 $C: x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右顶点, 所以

$A(1, 0)$, $|AM| = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2}$,

把 $y_0^2 = 3 - 3x_0^2$ 代入, 得

$|AM| = \sqrt{-2x_0^2 - 2x_0 + 4}$

$= \sqrt{-2(x_0 + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{2}}$,

又因为 $-1 \leq x_0 \leq 1$,

故当 $x_0 = -\frac{1}{2}$ 时, $|AM|$ 取到最大值 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 故

选 D.

评注 本题是圆锥曲线最值问题, 先由两点间距离公式表示出 $|AM|$ 后, 消去 y_0 的过程体现了方

程思想,最后得到一个二次函数和幂函数的复合函数,自变量 x_0 的范围的确定运用了椭圆的几何性质,再根据二次函数在闭区间上的最值知识可以得出所求的最大值.

四、立体几何中的函数与方程思想

函数与方程思想在立体几何问题中的考查主要体现在:

(1) 运用空间向量法求空间角或者距离时,求法向量的坐标通常要通过解三元不定方程组;

(2) 求空间距离的最大值或者空间角的某一三角函数值的最值或者范围时,通常最后要运用二次函数和三角函数的知识解决.

例6 (炎德英才大联考长郡中学高三联考)如图1,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为2, D 为棱 BB_1 (不包括端点)上一动点, E 是 AB 的中点.当 D 在棱 BB_1 (不包括端点)上运动时,求平面 ADC_1 与平面 ABC 的夹角的余弦值的取值范围.

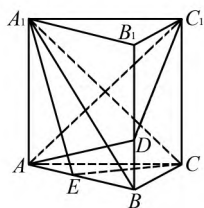


图1

解析 以 E 为原点, EB 为 x 轴, EC 为 y 轴,过 E 作垂直于平面 ABC 的垂线为 z 轴,建立空间直角坐标系,如图2所示,设 $BD=t$, 则 $A=(-1, 0, 0)$, $D(1, 0, t)$, $C_1(0, \sqrt{3}, 2)$, $\vec{AD}=(2, 0, t)$, $\vec{AC_1}=(1, \sqrt{3}, 2)$. 设平面 ADC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \vec{AD} = 2x + tz = 0 \\ \boldsymbol{n} \cdot \vec{AC_1} = x + \sqrt{3}y + 2z = 0 \end{cases},$$

$$\text{取 } x=1, \text{ 得 } \boldsymbol{n}=(1, \frac{4}{\sqrt{3}t} - \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{t}),$$

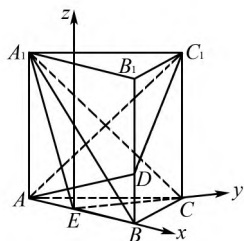


图2

平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0, 0, 1)$, 设平面 ADC_1 与平面 ABC 的夹角为 θ ,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \cos\theta &= \frac{|\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \frac{\frac{2}{t}}{\sqrt{1 + (\frac{4}{\sqrt{3}t} - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + \frac{4}{t^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{t^2 - 2t + 7}} = \sqrt{\frac{3}{(t-1)^2 + 6}}, \end{aligned}$$

由于 $t \in (0, 2)$, 故 $\cos\theta \in (\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, 即平面 ADC_1 与平面 ABC 夹角的余弦值的取值范围为 $(\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

五、数列中的函数与方程思想

数列中函数与方程思想的考查主要体现在:

(1) 已知等差(或等比)数列的五个基本量 $a_1, d(q), a_n, S_n, n$ 中三个求另外两个,通常建立方程组运用待定系数法求解;(2) 运用二次函数知识求等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最大值或者最小值问题;(3) 运用一次函数知识求等差数列的最大项或者运用指数函数知识求等比数列的最大项.

例7 (2022年山西吕梁二模)等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_5=2, S_4=28$, 则 S_n 的最大值为_____.

解析 由题设可得 $\begin{cases} a_1 + 4d = 2 \\ 4a_1 + 6d = 28 \end{cases}$, 解得

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ d = -2 \end{cases}, \text{ 所以 } S_n = 10n + \frac{n(n-1)}{2} \times (-2) = -n^2 +$$

$11n = -(n - \frac{11}{2})^2 + \frac{121}{4}$, 与 $\frac{11}{2}$ 最接近的正整数有5和6, 所以 S_n 的最大值为 $S_5 = S_6 = -5^2 + 11 \times 5 = 30$.

评注 本题中运用基本量法,建立二元一次方程组求出 a_1 和 d ,体现了方程思想,最后运用二次函数知识求出了 S_n 的最大值.

六、解三角形中的函数与方程思想

解三角形问题中函数与方程思想的考查主要有:(1) 运用正弦定理或者余弦定理求三角形的角或者边,体现了方程思想;(2) 解三角形中的求面积和周长等最值问题,通常最后运用正弦定理或者余弦定理实现边化角后,运用辅助角公式化为求形如 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 三角函数在给定区间上的最值问题,体现了函数思想.

例8 (2022届豫东豫北十校联考)在锐角 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\sqrt{3} \cos C + \sin C = \sqrt{3} b$ 且 $a=1$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的外接圆半径;

(2) 求 $2b - c$ 的取值范围.

解析 (1) 因为 $a = 1$, 由题设及正弦定理可得,
 $\sqrt{3} \sin B = \sqrt{3} \sin A \cos C + \sin C \sin A$,

因为 $A + B + C = \pi$, 所以 $\sin B = \sin(A + C)$, 代入上式可得 $\sqrt{3} \sin A \cos C + \sqrt{3} \cos A \sin C = \sqrt{3} \sin A \cos C + \sin A \sin C$, 所以 $\sqrt{3} \cos A \sin C = \sin C \sin A$,

因为 $0 < C < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin C \neq 0$, 所以 $\tan A = \sqrt{3}$,

又因为 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$,

设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 R , 由正弦定理可得 $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 解得 $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 由 (1) 知 $2R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以 $2b - c = 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin B - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin B - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(\frac{2\pi}{3} - B) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin B - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin B - \cos B = \sqrt{3} \sin B - \cos B = 2 \sin(B - \frac{\pi}{6})$ 因为 $\triangle ABC$

为锐角三角形, 所以 $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 即 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$,

则 $0 < B - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$, 所以 $0 < 2 \sin(B - \frac{\pi}{6}) < \sqrt{3}$, 即 $2b - c$ 的取值范围是 $(0, \sqrt{3})$.

评注 本题第 (1) 问运用正弦定理、三角形内角和定理、诱导公式以及两角和的正弦定理求 $\tan A$ 的过程体现了方程思想, 运用正弦定理解外接圆半径 R 的过程, 体现了方程思想; 第 (2) 问运用正弦定理把 $2b - c$ 实现边化角后, 再运用三角形内角和定理、两角差的正弦公式和辅助角公式把问题化归为求三角函数 $y = 2 \sin(B - \frac{\pi}{6})$ 在给定开区间上的值域问题, 体现了函数思想的运用.

七、不等式中的函数与方程思想

不等式中函数与方程思想的考查主要有:
 (1) 不等式恒成立求参数范围问题, 分离参数后构造函数, 转化为 $m < f(x)$ 在区间 D 上恒成立, 进而转化为求 $m < f(x)_{\min}(x \in D)$, 求 $f(x)$ 在区间 D 上的最小值即可; (2) 部分不等式问题, 可以结合已知条件三角换元后, 利用三角函数的性质求解.

例 9 (2022 届贵州联考) 已知 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $9^x - m \cdot 3^x + m + 1 > 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围为_____.

解法 1 令 $t = 3^x (t > 1)$, 则由题意得, 函数 $f(t) = t^2 - mt + m + 1$ 在 $t \in (1, +\infty)$ 上的图象恒在 x 轴的上方, 则有 $\Delta = (-m)^2 - 4(m + 1) < 0$ 或 $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{m}{2} \leq 1 \\ f(1) = 1 - m + m + 1 \geq 0 \end{cases}$ 解得 $m < 2 + 2\sqrt{2}$.

解法 2 由 $9^x - m \cdot 3^x + m + 1 > 0$ 得 $m < \frac{9^x + 1}{3^x - 1}$, 令 $f(x) = \frac{9^x + 1}{3^x - 1} = 3^x - 1 + \frac{2}{3^x - 1} + 2 \geq 2\sqrt{2} + 2$ (当且仅当 $3^x = 1 + \sqrt{2}$ 时取“=”), 所以 $m < 2 + 2\sqrt{2}$.

评注 本题解法 1 整体换元后, 运用二次函数、一元二次不等式和一元二次方程的知识可以解得 m 的范围, 考查了函数与方程思想; 解法 2 分离变量后构造函数, 再运用基本不等式可求得 m 的范围.

八、函数与方程思想在向量中的应用

向量中函数与方程思想的考查主要体现在: 求向量的模的最小值问题或求向量的数量积的最小值问题, 通过向量运算, 最后转化成求函数的最值问题.

例 10 设单位向量 a 与非零向量 b 的夹角是 $\frac{2\pi}{3}$, 且 $|a - b| = \sqrt{3}|a|$, 则 $|a - tb|$ 的最小值为 ().

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

解析 由 $|a - b| = \sqrt{3}|a|$ 可得 $a - 2a \cdot b + b^2 = 3a^2$, 又因为 $a \cdot b = |a||b|\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}|a||b|$, 又 $|a| = 1$, 从而 $|a| = |b| = 1$, 所以 $|a - tb| = \sqrt{|a - tb|^2} = \sqrt{a^2 - 2ta \cdot b + t^2 b^2} = \sqrt{t^2 + t + 1} = \sqrt{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$, 当且仅当 $t = -\frac{1}{2}$ 时, $|a - tb|$ 取最小值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 B.

评注 本题运用了向量的性质和向量的数量积的性质, 最后把问题转化成求二次函数与幂函数的复合函数的最小值问题.

函数与方程思想方法的运用贯穿于高中数学学习的自始至终, 教师在教学中要善于引导学生总结函数与方程思想在主干知识中的运用, 这样可以帮助学生构建知识方法体系, 可以使将函数与方程思想方法熟练运用于解题活动中, 可以促进学生的高品质学习.

(收稿日期: 2022 - 12 - 22)