

基于“三个理解”理念的函数性质教学设计

——以高三复习课“函数的对称性与周期性”为例

苏 昕¹, 费红亮²

(1. 杭州高级中学钱塘学校 浙江 杭州 310000; 2. 杭州高级中学 浙江 杭州 310000)

摘 要: 函数的对称性与周期性是高中数学中非常重要的性质,也是高考的热门考点.文章基于对“三个理解”的充分理解,在把握数学本质的同时,充分考虑学情以及高三复习课的实效性,对函数的对称性、周期性以及它们之间的关系做了整理,并给出了分析和解决这一类问题的基本思想方法.

关键词: 三个理解;高三复习课;对称性;周期性;基本思想方法

中图分类号: O122

文献标识码: A

文章编号: 1003-6407(2023)04-0027-04

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》的重点是落实数学学科核心素养,发展学生的数学学科核心素养已经成为高中数学课堂教学的目标导向^[1].但如何从培养学生核心素养的角度上好一节课却并不容易,为此,章建跃博士提出了“三个理解”理论:理解数学、理解学生、理解教学.理解数学的关键在于对数学的整体性、一般观念的把握.对于数学整体性,主要体现在纵向联系,即同一主题内容中体现的数学整体性;其次体现在横向联系,即整合具有内在联系的不同内容体现的数学整体性;最后是综合贯通,即不同领域之间的融合体现的整体性.对于一般观念,是对内容及其反映的数学思想和方法的进一步提炼和概括,是对数学对象定义方式、性质等问题的一般性回答.只有理解了数学,我们才能清楚“教什么”“为什么要教”,才能更好地把握一节课的重难点;理解学生就要做好学情分析,教学设计整体逻辑结构的合理性、局部设计的有效性等都与学情分析密切相关.因此,在学情分析时,需要准确找到学生的“最近发展区”,重视学生的知识结构、技能状况、学习困难及数学成绩等外显情况,也要重视学生的思维情况、认知特点、学习风格等内隐情况,理解数学和理解学生之后才能更好地理解教学^[2].让数学知识的发生和发展过程合理,让学生的认知过程和思维过程合理^[3],最后才能让课堂持续充满活力,而这种活力不应是表面的热闹,而是一种积极的思维活动.

1 教材与学情分析

在高一新授课时,函数的对称性和周期性分别被设置在人教A版普通高中教科书《数学》必修第一册(以下统称教材)的第3章“函数的概念与性质”第2节的第3课时和第5章“三角函数”第4节的第2课时.教材中对于对称性问题给出了两种特殊情形“奇函数”与“偶函数”.只在课后习题的第13题提出了更为一般的对称问题,由于课时有限及问题的抽象程度高,很多教师并没有对其展开探究.对于周期性的教学,教材借助正余弦函数的图象呈现了这种周而复始的现象,给出了周期的定义,并研究了正余弦函数的对称性和周期性,对于一般情况下函数对称性和周期性之间的关系并没有展开探究.作为高三复习课,本节课对函数的对称性和周期性进行整理,探究并形成了关于对称性与周期性更为一般的结论,理清它们之间的关系,构建知识完备性的同时,形成解决这一类问题的一般性解法.再通过对思想方法的反复渗透,把课堂从“知识传授”向“素养落实”转变.鉴于教学内容抽象、所教班级学生思维活跃,笔者选择了启发式讲授的教学方式,以谋取学生利益的最大化.

2 教学过程设计

2.1 问题引入

上课前,教师先带学生们欣赏几幅图片,分别从建筑中、自然中、我们中(向学生比画自己的眼睛、耳朵等)展示对称之美,最后再呈现近几年关于对称的高考题,说明对称之美也广泛地存在于高考题中.

收文日期: 2022-12-13; 修订日期: 2023-01-13

作者简介: 苏 昕(1988—)男,浙江杭州人,中学一级教师.研究方向: 数学教育.

设计意图 设置情境,由对称的图片过渡到涉及对称性问题的考题,并运用肢体语言和学生互动,激发学习兴趣的同时,引出本节课的第一部分内容——函数的对称性.

2.2 问题探究

问题1 在学习过的函数中,哪些函数具有对称性?

学生共同回答,教师适当补充:二次函数、三次函数、三角函数、对勾函数等.

问题2 如何去判定一个函数的图象是否具有对称性?

选择一位学生回答:观察函数的图象或研究函数的代数式.紧接着,教师从数和形两个角度对函数的对称性进行启发式讲解,从特殊到一般,从熟悉的奇偶函数开始,再到更为一般的情形.

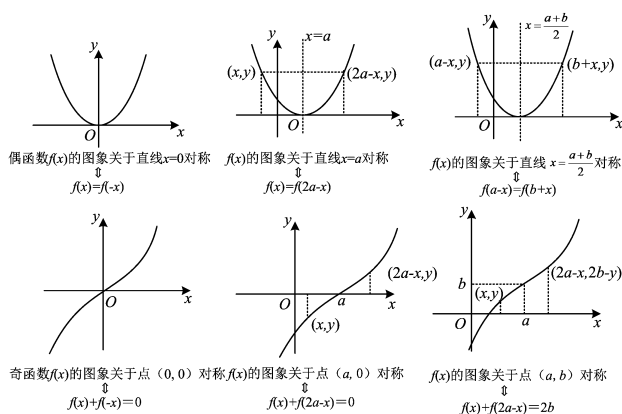


图1

图形对称的本质是点对称,由对称点的代数关系,得出对称图象所对应的代数关系,反过来,又能由代数关系得出函数的图象性质.但是,在同一个对称性下对应的代数式有无数个,例如 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称,对应的代数式可以是 $f(a-x)=f(a+x)$,也可以是 $f(x)=f(2a-x)$,还可以是 $f(-a-x)=f(3a+x)$ ……最后归纳出一般化结论如下:

结论1 若 $f(x+a)=f(-x+b)$,则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

结论2 若 $f(x+a)+f(-x+b)=0$,则 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a+b}{2}, 0)$ 对称.

结论3 若 $f(x+a)+f(-x+b)=c$,则 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ 对称.

设计意图 从一般到特殊,从数到形,再从形到数,帮助学生把握图形对称的本质,理清图形对

称性及其对应代数式之间的关系,这样不仅落实了知识要求,更是提升了学科素养.

思考 1) 若 $f(\omega x+a)$ 为偶函数, $\omega \neq 0$,则 $f(x)$ 的对称轴是_____.

2) 若 $f(\omega x+a)$ 为奇函数, $\omega \neq 0$,则 $f(x)$ 的对称中心是_____.

分析 1) 因为 $f(\omega x+a)$ 为偶函数,所以

$f(\omega x+a)=f(-\omega x+a)$,再借助图象解释这个式子的内涵(横坐标分别为 $-\omega x+a$ 和 $\omega x+a$ 的两个点关于直线 $x=a$ 对称),如图2所示,进而得出 $f(x)$ 的对称轴为

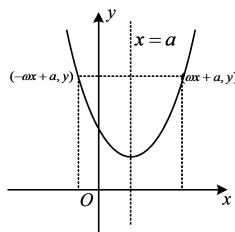


图2

$$x = \frac{\omega x + a + (-\omega x + a)}{2} = a.$$

2) 因为 $f(\omega x+a)$ 为奇函数,所以

$$f(\omega x+a)+f(-\omega x+a)=0,$$

同理可得 $f(x)$ 的对称中心为点 $(a, 0)$.

评注 1) 为了便于理解,可将复合函数 $f(\omega x+a)$ 记作 $F(x)$,因为 $f(\omega x+a)$ 为偶函数,只需对自变量 x 取相反数,即 $F(x)=F(-x)$,亦即 $f(\omega x+a)=f(-\omega x+a)$;

2) 若奇函数 $f(\omega x+a)$ 在直线 $x=0$ 处有意义,可得 $f(a)=0$,进一步,可得3个更一般的结论.

结论4 $f(\omega x+a)=f(-\omega x+b)$, $\omega \neq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

结论5 $f(\omega x+a)+f(-\omega x+b)=0$, $\omega \neq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a+b}{2}, 0)$ 对称.

结论6 $f(\omega x+a)+f(-\omega x+b)=c$, $\omega \neq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ 对称.

设计意图 以两个思考问题作为脚手架,进一步熟悉对称性下数与形之间的相互转化,并得出最一般化的结论,形成知识完备性的同时,提升学生的抽象概括能力.

问题3 从3个式子可以看出 x 前的系数异号,若 x 前的系数改为同号,则又能推出函数的什么性质,大家还记得吗?

结论7 若 $f(x+a)=f(x+b)$, $a \neq b$,则 $f(x)$ 的一个周期为 $|b-a|$.

结论8 若 $f(x+a)+f(x+b)=0$, $a \neq b$,则 $f(x)$ 的一个周期为 $2|b-a|$.

结论9 若 $f(x+a)+f(x+b)=c$, $a \neq b$,则 $f(x)$

的一个周期为 $2|b-a|$.

这块知识变换的形式很多,教学时不做过多的变形,只引导学生回顾周期的本质(若 $f(x) = f(x+T)$ 则 T 为周期),并对结论 9 进行证明:

证明 已知 $f(x+a) + f(x+b) = c$ 且 $a \neq b$, 令 $t = x+a$, 则

$$f(t) + f(t+b-a) = c,$$

再次赋值,可得 $f(t+b-a) + f(t+2b-2a) = c$,

联立得 $f(t) = f(t+2b-2a)$,

故 $f(x)$ 的一个周期为 $2|b-a|$.

设计意图 由括号内“自变量异号”,自然地过渡到括号内“自变量同号”的情况,这样的处理方式符合学生的认知特点.对结论 9 进行证明,给出了证明周期性问题的通法.

问题 4 我们分别对中心对称、轴对称和周期性做了研究,三者之间有什么关系吗?

教师口述: 1) $y = \tan x$ 有对称中心,有周期,无对称轴; 2) $y = |\sin x|$ 有对称轴,有周期,无对称中心; 3) $y = \sin x$ 有对称中心,有对称轴,是周期函数.最后归纳得到以下 3 个结论.

结论 10 若 $f(x)$ 的图象既关于直线 $x=a$ 对称,又关于直线 $x=b$ 对称,则 $f(x)$ 的一个周期为 $2|b-a|$.

结论 11 若 $f(x)$ 的图象既关于点 $(a, 0)$ 对称,又关于点 $(b, 0)$ 对称,则 $f(x)$ 的一个周期为 $2|b-a|$.

结论 12 若 $f(x)$ 的图象既关于点 $(a, 0)$ 对称,又关于直线 $x=b$ 对称,则 $f(x)$ 的一个周期为 $4|b-a|$.

同样地,直接给出结论 12 的证明.

证明 由函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(a, 0)$ 对称,知 $f(x) + f(2a-x) = 0$, 由函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=b$ 对称,知 $f(x) = f(2b-x)$, 其中 $a \neq b$, 两式联立得 $f(2a-x) + f(2b-x) = 0$, 可得 $f(x)$ 的一个周期为 $4|b-a|$.

评注 两对称点在同一高度,仍可以得到周期(用图象上下平移进行直观解释).若两对称点一高一低,则不能得到周期(用图象的旋转进行直观解释).

设计意图 借助具体函数的特征,理清对称中心、对称轴与周期性之间的关系,说明这三者之间并不总是“知二求一”.

3 范例分析

例 1 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+2)$ 为偶函数, $f(2x+1)$ 为奇函数, 则 ()

$$A. f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$B. f(-1) = 0$$

$$C. f(2) = 0$$

$$D. f(4) = 0$$

(2021 年全国数学新高考 II 卷第 8 题)

分析 由 $f(x+2)$ 为偶函数, 知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称. 由 $f(2x+1)$ 为奇函数, 知 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称且 $f(1) = 0$, 进而得出 $T=4$. 然后借助几何直观画出一个周期内确定的点, 由对称性得 $f(3) = f(1) = 0$, 由周期性得 $f(-1) = f(3) = 0$. 作为一道单选题, 可以确定答案选 B. 如果这道题改为多选题, 要说明某个选项不成立, 那么可以画出满足题目条件的反例.

设计意图 通过例题的分析和讲解, 给出解决这类题的通法.

变式 1 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+2)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称, $f(1+x) + f(1-x) = 2$, 又 $f(0) = 2$, $g(x) - f(x-4) = 7$, 则 $\sum_{k=1}^{22} g(k) =$ _____.

分析 由 $f(x+2)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称, 知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称, 由 $f(1+x) + f(1-x) = 2$, 知 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称, $f(1) = 1$, 且 $T=4$, 结合轴对称得 $f(-1) = 1$; 结合 $f(0) = 2$ 和点对称得 $f(2) = 0$, 从而

$$f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = 4,$$

进一步得 $f(k) + f(k+1) + f(k+2) + f(k+3) = 4$,

$$\text{因此 } \sum_{k=1}^{22} g(k) = \sum_{k=1}^{22} f(k-4) + 7 \times 22 \\ = f(-3) + f(-2) + 5 \times 4 + 7 \times 22 = 175.$$

评注 给足时间让学生思考, 教师进行指导, 最后选取一名学生发言.

设计意图 通过变式题的训练, 巩固解决此类问题的一般性方法.

变式 2 (多选) 已知函数 $f(x)$ 及其导函数的定义域都为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $f\left(\frac{3}{2}-x\right)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, $g(1+2x)$ 为奇函数, 则 ()

$$A. f(0) = 0$$

$$B. g(2) = 0$$

$$C. f(-1) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$D. g(-1) = g(2)$$

分析 由 $f\left(\frac{3}{2}-x\right)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,

知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称, 从而 $g(x)$ 的

(下转第 30 页)

体验、探究、反思式校本化学科作业的实践与思考

何君青

(致远初级中学 江苏 南京 210019)

摘要:“双减”政策的提出对各学科作业的设计有了更高的要求.打破原有落后、陈旧的方式,还作业以新的活力,使之以崭新的面貌走进学生的学习、生活,是今后作业改革的必然趋势.体验式作业具有趣味性,关注实践操作、动手过程;探究式作业具有开放性,关注学科某个具有探究价值的问题的深入研究;反思式作业具有创造性,关注学习过程中经验的获得、概念的理解、实践的掌握.文章结合具体实例,阐述体验、探究、反思式校本化学科作业的内涵、特征、选材、定位等.

关键词: 体验、探究、反思、作业设计

中图分类号: O12

文献标识码: A

文章编号: 1003-6407(2023)04-0030-04

作业改革是建设高质量学校教育体系的关键因素.目前的初中数学作业内容拘泥于课堂知识、现行教材,陷入机械训练、重复练习的误区不能自

拔.这些作业已经严重脱离学生的生活实际,极大地削弱了学生解决实际问题的能力,过重的学业负担、作业任务也泯灭了学生学习数学的热情,严重

(上接第29页)

的图象关于点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 对称.由 $g(1+2x)$ 为奇函数,知 $g(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, $g(1)=0$, $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,从而 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期都为1.利用解决此类题目的一般性方法,画出一个周期内可以明确的点,确定了选项B和D,然后再画出符合图形性质的反例,排除选项A和C.

评注 给足时间让学生思考,教师进行指导,并选择典型问题进行讲解(略).

4 课堂小结

1) 这节课学习了什么?

一个对象: 函数; 两种性质: 对称性与周期性; 两个关系: 对称性与周期性的关系、原函数与导函数对称性的关系.

2) 本节课运用了什么思想方法?

3 种思想方法: 数形结合、从特殊到一般、转化与化归.

设计意图 由学生对本节课的内容进行小结是学生学习情况的反馈之一,教师再进行补充是对知识的凝练和升华.

5 教学反思

如何才能是一节好课? 不同的人有不同的理解,

但备好一节课,“三个理解”是前提.本节课是在“三个理解”理论的基础上进行的教学设计,对于一节高三复习课而言,既要讲究合理性,又要注重收益性,教师要有取舍,把握好一节课的主要知识和思想方法,实现学生受益的最大化.因为“函数的对称性与周期性”课题涉及内容量较大,在授课的过程中节奏比较快,在研究原函数及其导函数之间对称性的关系时,只研究了定义域为 $\mathbf{R}$ 且可导的函数,对于一般情况下原函数及其导函数之间对称性的关系问题并未展开讨论.另外,本节课只研究了“自对称”问题,对于“互对称”问题并没有展开.

参 考 文 献

- [1] 程华.从数学核心素养培育看教师专业能力提升[J].数学通报,2019,58(5):14-17;59.
- [2] 章建跃.中学数学课改的十个论题[J].中学数学教学参考(上旬),2010(3):2-5;11.
- [3] 章建跃.核心素养导向的高中数学教材变革(续1):《普通高中教科书·数学(人教A版)》的研究与编写[J].中学数学教学参考(上旬),2019(7):6-11.

收文日期: 2022-12-10; 修订日期: 2023-01-13

基金项目: 江苏省教育科学“十三五”规划2020年度立项课题(D/2020/02/67); 南京市教育科学“十四五”2021年度立项课题(L/2021/196)

作者简介: 何君青(1987—),男,江苏南京人,中学高级教师.研究方向: 数学教育.