○学习指导○

函数对称性和周期性的深层次探究

周顺钿　　　　苏　昕

(浙江省杭州高级中学,310003)　(浙江省杭州高级中学钱塘学校,310005)

函数的奇偶性、对称性和周期性是函数的重要性质,是研究函数的重要工具,也是近两年全国卷反复考查的热点. 含有对称轴或对称中心的抽象函数问题往往条件比较隐蔽,考生需要根据已知条件进行恰当的转化,判断其周期性,进而揭示问题的本质,达到简便计算的目的.

一、关于抽象函数对称性和周期性的二级结论

1. 函数的对称性

设点 $P(a+x, f(a+x))$, $Q(a-x, f(a-x))$,则由中点公式可知函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $M(a,b)$ 对称,当且仅当 $f(a-x)+f(a+x)=2b$; 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称,当且仅当 $f(a-x)=f(a+x)$. 由此可得到

结论 1 (1) 函数 $f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 中心对称,当且仅当 $f(a-x)+f(a+x)=2b$; (2) 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称,当且仅当 $f(a-x)=f(a+x)$.

变式 1 若 $f(a-x)+f(b+x)=c$,则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$ 中心对称; 若 $f(a-x)=f(b+x)$,则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

变式 2 若 $f(a-\omega x)+f(a+\omega x)=2b$,则函数 $f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 中心对称; 若 $f(a-\omega x)=f(a+\omega x)$,则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

评注 这里的结论 1 是函数奇偶性概念的拓展,变式 2 说明伸缩变换不改变函数的对称特征.

2. 函数的周期性

结论 2 (1) 若 $f(a+x)=f(b+x)\ (a\neq b)$,则函数 $f(x)$ 以 $T=|a-b|$ 为周期; (2) 若 $f(a+x)+f(b+x)=c\ (a\neq b)$,则函数 $f(x)$ 以 $T=2|a-b|$ 为周期.

证明 (1) 略.

(2) 在 $f(a+x)+f(b+x)=c$ 中,以 $x-b$ 替换 x,得

$$f(x+a-b)+f(x)=c. \quad ①$$

在 ① 式中以 $x+a-b$ 替换 x,得

$$f(x+2a-2b)+f(x+a-b)=c. \quad ②$$

由 ① ② 两式相减,可得 $f(x+2a-2b)=f(x)$. 所以函数 $f(x)$ 以 $T=2|a-b|$ 为周期.

3. 函数对称性与周期性的联系

由函数对称性与周期性的概念,可证明

结论 3 (1) 若函数 $f(x)$ 的图象关于两条直线 $x=a$, $x=b\ (a\neq b)$ 对称,则 $f(x)$ 以 $T=2|a-b|$ 为周期;

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象关于两个点 (a, c), $(b,c)\ (a\neq b)$ 对称,则 $f(x)$ 以 $T=2|a-b|$ 为周期;

(3) 若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 和点 $(b,c)\ (a\neq b)$ 对称,则 $f(x)$ 以 $T=4|a-b|$ 为周期

4. 原函数与其导函数图象对称性的联系

结论 4 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $g(x)=f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 中心对称,则 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称; 反之亦然.

(2) 若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称,则 $g(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 中心对称; 反之

亦然.

证明 (1) 由$f(x)$的图象关于点(a,b)中心对称,得$f(x)+f(2a-x)=2b$. 两边求导,得$f'(x)=f'(2a-x)$,即$g(x)=g(2a-x)$,所以函数$g(x)$的图象关于$x=a$对称.

反之,若$g(x)$的图象关于$x=a$对称,则$g(x)=g(2a-x)$,即$f'(x)=f'(2a-x)$. 构造$h(x)=f(x)+f(2a-x)$,则$h'(x)=0$,可得$h(x)=f(x)+f(2a-x)=2b$(b为某一常数),即$f(x)$的图象关于点(a,b)中心对称.

(2) 证明过程与(1)类似,这里从略.

评注 反映到几何上,以点(a,b)为对称中心的函数$f(x)$图象在对称的两点处的切线斜率相等,即其导函数图象上对应的两点关于直线$x=a$对称;关于直线$x=a$对称的函数$f(x)$在对称的两点处的切线斜率为相反数,即其导函数图象上对应的两点关于点$(a,0)$中心对称.

二、应用举例

例1 (2021年全国甲卷高考题)设函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,$f(x+1)$为奇函数,$f(x+2)$为偶函数,当$x\in[1,2]$时,$f(x)=ax^2+b$. 若$f(0)+f(3)=6$,则$f\left(\frac{9}{2}\right)=$( )

(A) $-\frac{9}{4}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $\frac{7}{4}$ (D) $\frac{5}{2}$

解 由$f(x+1)$是奇函数,得$f(-x+1)+f(x+1)=0$,故$f(1)=0$,$f(0)+f(2)=0$,且由结论1知$f(x)$的图象关于点$(1,0)$中心对称;又由$f(x+2)$是偶函数,得$f(x+2)=f(-x+2)$,故$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称,且$f(3)=f(1)=0$. 综上,由结论3知$f(x)$以$T=4$为周期.

于是$f(1)=a+b=0$,$f(0)+f(3)=-f(2)=-(4a+b)=6$,解得$a=-2$,$b=2$. 所以$f(x)=-2x^2+2$,$x\in[1,2]$. 于是$f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$. 选D.

例2 (2022年全国乙卷高考题)已知函数$f(x)$,$g(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$,且$f(x)+g(2-x)=5$,$g(x)-f(x-4)=7$. 若$y=g(x)$的图象关于直线$x=2$对称,并且$g(2)=4$,则$\sum_{k=1}^{22}f(k)=$( )

(A) -21 (B) -22 (C) -23 (D) -24

解 由$y=g(x)$的图象关于直线$x=2$对称,得$g(2-x)=g(2+x)$. 将条件代入,得$5-f(x)=7+f(2-x)$,即

$$f(x)+f(2-x)=-2, \quad ①$$

亦即$f(x)$的图象关于点$(1,-1)$对称.

又因为$f(2-x)+g(x)=5$,$g(x)-f(x-4)=7$,两式相减得

$$f(2-x)+f(x-4)=-2, \quad ②$$

即$f(x)$的图象关于点$(-1,-1)$对称.

综上,由结论3知$f(x)$以$T=4$为周期.

在$f(2-x)+g(x)=5$中令$x=2$,得$f(0)+g(2)=5$. 又$g(2)=4$,所以$f(0)=1$. 由①式分别令$x=-1$,$x=1$,$x=0$,可得到$f(-1)=-1$,$f(1)=-1$,$f(2)=-3$. 所以$h(n)=f(4n-1)+f(4n)+f(4n+1)+f(4n+2)=f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)=-4$,其中$n\in\mathbf{N}$.

所以$\sum_{k=1}^{22}f(k)=f(1)+f(2)+\sum_{n=1}^{5}h(n)=-1-3+5\times(-4)=-24$. 选D.

例3 (2022年全国I卷高考题)(多选题)已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$,记$g(x)=f'(x)$,若$f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$,$g(2+x)$均为偶函数,则( )

(A) $f(0)=0$ (B) $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

(C) $f(-1)=f(4)$ (D) $g(-1)=g(2)$

解 由$f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$为偶函数,得$f\left(\frac{3}{2}-2x\right)=f\left(\frac{3}{2}+2x\right)$,所以$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{3}{2}$对称,从而导函数$g(x)$的图象关于点$\left(\frac{3}{2},0\right)$中心对称.

又由$g(2+x)$为偶函数,得$g(2+x)=$

(下转第8页)

最大值.

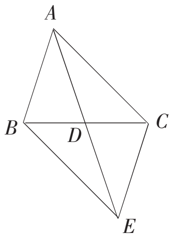

图 6

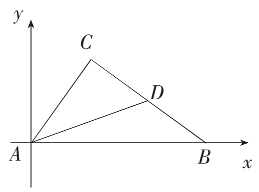

图 7

生 13: 我联想前面的坐标法，建立直角坐标系如图 7，由条件 $AD = 1$，可设点 $D(\cos\theta, \sin\theta)$. 依题意可得到点 $C\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta, 2\sin\theta\right)$, $B\left(2\cos\theta - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta, 0\right)$，且 $|AC| = \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\theta$, $|AB| = 2\cos\theta - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$.

于是 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AC||AB|\sin 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}$，下面做法同生 12.

师: 这两位同学利用不同的方法来解决问题，体现了他们对问题的有效观察和对基本模型深刻的理解.

设计意图 在平时的教学中，我们应该着力通过提出基本数学问题引发学生发现问题和提出问题，使基本问题得以深化，促进学生数学核心素养的落实. 作为教师，需要在必要的时候对学生加以引导，体会知识的本质. 上述通过构建基本知识模型提出问题和解决问题的过程，是教师创设问题情境帮助学生建构数学抽象、数学运算和数学建模的过程.

三、结束语

重视数学基本模型的构建是数学学习在认识上的一个提升，这不仅有利于学生掌握知识，形成自己的知识体系，加深对问题的理解，还能更好地落实用数学的眼光观察世界、用数学的思维思考世界、用数学的语言表达世界，是培养数学核心素养的一种具体途径.

在日常教学中，教师要精心设计有价值的基本模型供学生学习. 基本模型的素材可来源于一些具有拓展性的、典型性的基本问题和基本结论，也可以是教材的例题、课后习题，以及高考真题、模拟题等. 本课通过构建方程、基本不等式、函数等基本数学模型，从不同的角度进行解答，彰显了数学思维之美.

实践证明: 教师创设有效的问题情境，有意识地培养学生构建数学模型的能力，多留给学生发现问题和提出问题的机会，多让学生去表达自己的想法和见解，长期下来，学生的数学核心素养就能得到落实和发展.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社，2018.

(上接第 10 页)

$g(2-x)$，所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称，从而原函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, b)$ 中心对称.

综上，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都以 $T = 2$ 为周期.

于是，由 $f(2)$ 的值不确定，知 $f(0)$ 的值也不确定，选项 A 错误; 由 $g\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$，知选项 B 正确; 由变式 1，在 $f(x) = f(3-x)$ 中，令 $x = -1$，得 $f(-1) = f(4)$，选项 C 正确; 由 $g(x) + g(3-x) = 0$ 中，令 $x = 1$，得 $g(2) + g(1) = 0$，即 $g(2) + g(-1) = 0$，所以选项 D 错误. 故选 BC.

思考 若改变 $f\left(\frac{3}{2} - 2x\right)$，$g(2+x)$ 的奇偶性，不同的组合会得到哪些不同的结果?

函数的知识体系，一直是数学教学的重点和难点，蕴含着数形结合、化归转化等重要的数学思想，将函数的周期性与函数的对称性有机结合，可以深刻地考查学生逻辑推理、直观想象、数学运算、数学建模等数学核心素养.