

高考三角函数一轮复习策略思考

——基于广东高考年报

邱志权 余铁青 (广东省中山市桂山中学 528463)

1 引言

纵观近年高考试题,结合各大主流联考试卷,都呈现出这样一个客观事实:三角函数部分知识内容的考查力度在增大.命题着力点依旧是对于三角函数图象性质和三角函数恒等变换的考查.具体包括其周期性、单调性、零点、最值、限定条件下的正余弦定理、二倍角公式、诱导公式、合一公式、面积公式等的考查.考查的知识内容越来越全面,命题在深度和广度上一直在挖掘延伸,对学生的思维能力要求逐年提高,整体正在从考查知识向考查能力转变.

2 高考数学三角函数内容实例分析

例 1 (2019 年新课标 I 卷文数第 7 题) $\tan 255^\circ = (\quad)$.

- A. $-2 - \sqrt{3}$ B. $-2 + \sqrt{3}$
C. $2 - \sqrt{3}$ D. $2 + \sqrt{3}$

解析 $\tan 255^\circ = \tan(180^\circ + 75^\circ) = \tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = 2 + \sqrt{3}$, 选 D.

例 2 (2019 年新课标 I 卷文数第 11 题) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .

已知 $a \sin A - b \sin B = 4c \sin C$, $\cos A = -\frac{1}{4}$, 则

$\frac{b}{c} = (\quad)$.

- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

解析 一方面由 $a \sin A - b \sin B = 4c \sin C$ 结合正弦定理得: $a^2 - b^2 = 4c^2$ ①, 另一方面 $\cos A =$

$-\frac{1}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ②, 由 ①② 可以得到 $\frac{b}{c} = 6$,

所以选 A.

例 3 (2020 年新课标 III 卷理数第 9 题) 已知

$2 \tan \theta - \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 7$, 则 $\tan \theta = (\quad)$.

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

解析 由 $2 \tan \theta - \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 7$, 得

$2 \tan \theta - \frac{\tan \theta + 1}{1 - \tan \theta} = 7$, 即 $2 \tan \theta - 2 \tan^2 \theta - \tan \theta - 1 = 7 - 7 \tan \theta$, 得 $2 \tan^2 \theta - 8 \tan \theta + 8 = 0$, 即 $\tan^2 \theta - 4 \tan \theta + 4 = 0$, 即 $(\tan \theta - 2)^2 = 0$, 则 $\tan \theta = 2$, 故选 D.

评注 例 1 考查正切函数的周期与两角和的展开式, 需要将不熟悉的角度通过转化成熟悉角度的组合的形式进行求解, 属于考查纯积累公式的题型, 难度较小. 广东高考年报(2019)^[1] 统计结果显示: 该题平均分 2.48, 标准差 2.50, 难度 0.50, 区分度 0.58, 其中 57 652 人选 A, 占比 18.47%, 59 313 人选 B, 占比 19.00%, 40 081 人选 C, 占比 12.84%, 15 5156 人选 D, 占比 49.70%. 通过上述数据不难看出一个惊人的结论: 很多学生甚至不明白 255° 是第三象限角, 它相应的正切值应该是正数. 实际上选 A 或 B 的同学有 37.47%, 此部分学生基本上是完全不懂三角函数. 另外, 基于正切函数的单调性, 显然 $\tan 255^\circ = \tan 75^\circ > \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 故而只能选 D.

研究).

3 几点思考与建议

(1) 注重学生的探究过程

学生探究要重于教师讲授, 教学中还需多留一些时间和空间, 让学生有更多的机会切身感受和经历通过探究获得的成功感, 感悟数学知识建构的一般规律.

(2) 关注学生的探究表述

教学中还需特别关注学生对探究或实验结果

的表述, 帮助学生准确理解数学知识, 消解困惑. “让学生学会求知” 比 “让学生掌握知识” 更重要, 因而要鼓励学生用自己的语言表达自己的观点, 把探究过程和参与过程表达出来.

(3) 降低学生的理解抽象度

综合题中有时模型很多, 模型和基本图形其实是教学的总结, 教学中应该淡化一些模型的提炼和总结, 而为了化解重难点, 应多关注思维操作上的困惑, 利用类比等方法进行探究.

例 2 是典型的正余弦定理的混合应用,难度中等.学生应掌握角化边的应用,计算中发现两个方程有三个未知数,求解其中两个量的比例关系,这实际上是高等数学里面 n 元方程基础解系的三元情况.这与《普通高中数学课程标准(2017 年版)》所提及的要在高中数学中渗透高等数学思想,考查学生进一步学习高等数学的潜力的初衷高度吻合.广东高考年报(2019)统计结果显示:该题平均分 2.50,标准差 2.50,难度 0.50,区分度 0.76,其中 156 104 人选 A,占比 50.01%,53 924 人选 B,占比 17.28%,57 087 人选 C,占比 18.29%,45 051 人选 D,占比 14.42%.对比例 1、例 3,发现这两题与例 2 的得分大致一样,但从知识难度层面来讲,此题的难度是大于例 1、例 3 的,因为这题的函数思维显然要求更高,造成这样的实际结果,只能说明学生对正、余弦函数的熟悉程度相较于正切函数而言更高,也说明学生的基础知识掌握不扎实.

例 4 (2019 年新课标 I 卷文数第 15 题)函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) - 3 \cos x$ 的最小值为 _____.

解析 由三角函数诱导公式 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) - 3 \cos x = -\cos 2x - 3 \cos x$,结合二倍角公式 $f(x)$ 可化为 $f(x) = -(2\cos^2 x - 1) - 3 \cos x = -2\cos^2 x - 3 \cos x + 1$.再进行换元,设 $t = \cos x$,其中 $t \in [-1, 1]$,构造函数 $g(t) = -2t^2 - 3t + 1, t \in [-1, 1]$.结合二次函数图象易知 $g(t)_{\min} = -4$.

评注 此题主要考查诱导公式,要求学生能够将整个函数解析式转化成同名三角函数,再利用二倍角公式进行角度上的化归,最后再结合换元法的使用将此题转化为一个求二次函数的局部函数图象的最值问题.整体而言对学生的转化能力要求较高,学生应熟练各部分之间的转化.广东高考年报(2019)统计结果显示:样本数 312 463,平均分 0.91,标准差 1.93,难度 0.18,区分度 0.51.从统计数据不难发现这道题的得分率极低,然而从考查知识点的角度而言,难度不算大,只属于中等稍难题,这说明学生解决多知识融合问题的能力较弱,对很多知识无法进行整合、归纳,其知识模块相互孤立,没有形成必要的合力.

例 5 (2019 年新课标 I 卷理数第 11 题)关

于函数 $f(x) = \sin |x| + |\sin x|$,有下列四个结论:

- ① $f(x)$ 是偶函数;
- ② $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增;
- ③ $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 4 个零点;
- ④ $f(x)$ 的最大值为 2.

其中所有正确结论的编号是().

- A. ①②④ B. ②④ C. ①④ D. ①③

解析 由题意,显然有 $f(x)$ 是个偶函数,所以 ① 正确;当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取到最大值,且最

大值为 2, ④ 正确;当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $\sin |x| >$

0, $\sin x > 0$, $f(x) = 2 \sin x$,显然在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减, ② 不正确;另外 $f(0) = 0$,根据偶函数的性质在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上的零点只能是奇数个,实际上就是 3 个零点.于是本题选 C.

评注 本题考查的知识点为三角函数的图象性质,主要集中考查奇偶性、单调性、零点、对称轴、最值等性质.随着高考开始考查多选题,此类试题的考查频率极有可能越来越高.广东高考年报(2019)统计结果显示:平均分 3.75,标准差 2.17,难度 0.75,区分度 0.50,具体情况为:选 A 32 079 人,占比 9.36%,选 B 29 786 人,占比 8.69%,选 C 257 159 人,占比 75.02%,选 D 23 751 人,占比 6.93%.此题处在选择题靠后位置,理论上讲应该是难度偏大题型,实际上考生答题比较理想,题干虽说有一些复杂,但是四个结论相对简单,只要掌握好图象基本知识,想要做对其实不难.

例 6 (2019 年新课标 I 卷理数第 11 题) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 设 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $\sqrt{2}a + b = 2c$, 求 $\sin C$.

解析 (1) 由 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$, 结合正弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$.应用余弦定理整理得 $\cos A = \frac{1}{2}$, 又因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由 (1) 知 $B + C = \frac{2\pi}{3}$, $\sqrt{2}a + b = 2c$, 整理

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

得 $\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{3} + \sin B = 2 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - B \right)$.

展开化简得 $\sin \left(C + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $C \in \left(0, \frac{2\pi}{3} \right)$, 故 $\cos \left(C + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin C = \sin \left[\left(C + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{3} \right] = \sin \left(C + \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{\pi}{3} - \cos \left(C + \frac{\pi}{3} \right) \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

例 7 (2020 年新高考山东 I 卷理数第 17 题) 在 ① $ac = \sqrt{3}$, ② $c \sin A = 3$, ③ $c = \sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 c 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$, $C = \frac{\pi}{6}$, _____?

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

解 ① $ac = \sqrt{3}$. $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \sqrt{3} \sin B$, 即 $b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, 由 $ac = \sqrt{3}$, 得 $c = \frac{\sqrt{3}}{a}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab} = \frac{a^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{3}{a^2}}{2\sqrt{3}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 从而 $a = \sqrt{3}$,

$b = 1, c = 1$.

② $c \sin A = 3$. $\triangle ABC$ 中, $c \sin A = a \sin C = a \sin \frac{\pi}{6}$, 故 $a = 6$. 又 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$, 即 $a = \sqrt{3}b$, 故 $b = 2\sqrt{3}$.

所以 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{36 + 12 - c^2}{2 \times 6 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $c = 2\sqrt{3}$.

③ $c = \sqrt{3}b$. 因为 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$, 即 $a = \sqrt{3}b$, 又 $c = \sqrt{3}b$, 则 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{6} \neq \cos \frac{\pi}{6}$, 与已知条件 $C = \frac{\pi}{6}$ 相矛盾, 所以问题中的三角形不存在.

评注 一方面, 例 6、例 7 都是正弦定理的

综合应用, 要求考生能够运用正弦定理进行有效的角边互化, 整体难度不大, 对学生的知识能力要求不高. 在计算中可能出现多种情况的情况下利用内角和的隐含条件去除多余的情况, 使得计算在有约束的条件下进行, 有利于考查学生思维的严谨性. 另外, 例 7 是结构不良型问题, 对学生选择策略的考查实际为素养的考查, 考查学生在规定时间内根据已有知识作出妥善选择, 选择最好的方法来求解. 广东高考年报 (2019) 对例 6 的统计结果显示: 平均分 7.42, 标准差 3.86, 难度 0.62, 区分度 0.77. 从以上数据可以发现学生的基本思路较清晰, 从区分度看, 学生大多都可以得分, 也说明对简单的题加以练习, 可使多数学生掌握, 进而得分.

3 三角函数一轮复习建议

(1) 认真研读考纲与高考年报等核心指导文件
一轮复习事关整个复习效率的高低, 甚至可以说是一次彻底的大规模基础知识的回顾, 该准确把握哪些重点、哪些难点、哪些要求掌握、哪里只要理解, 都要根据指导性文件进行删选, 确定重点复习方向, 做到有的放矢. 而每一年的高考学生所暴露出来的问题基本上是大同小异的, 基于高考年报的统计数据基本是在一轮复习中后期才会发布出来的客观实际情况 (一线教师很难在教育考试院改完卷立马拿到数据), 教师可以参考前一年的知识点, 充分利用身边可用的教研资源, 争取拿到与全国同时期最新的权威高考模拟试题, 以便在复习中进行权衡、综合研判.

(2) 复习过程切实做到回归课本

教材是什么? 教材是学生学习新知识的最本原的载体. 近些年教师圈出现了一个怪象, 复习只用一本参考书而完全不用教材. 这样做实际上与《普通高中数学课程标准 (2017 年版)》的指导精神背道而驰. 事实证明, 高考越来越重视教材的地位和作用. 2019 年全国 I 卷三角函数模块的所有试题似乎都谈不上很难, 但少有人清晰地意识到有不少试题其实来自于教材母题的演变, 例如理科第 17 题的母型就是人教版高中数学必修 1 教材第 18 页的第 3 题.

(3) 复习中注重基础思维的训练

数学究竟考什么? 笔者认为是考查学生运用知识解决问题的能力. 而解决问题效率的高低, 甚至能不能解决问题最主要的还是思维的问题, 像

使核心素养的培养在课堂教学过程中落地生根.

本节章起始课通过问题情境使教学内容问题化,通过对图形的观察、动手实验、计算推理、合作交流等教学活动使教学过程探索化.

4.3 在章起始课教学中发展学生的高阶思维,提升核心素养

章起始课综合性强、知识跨度大、思维要求高,是发展学生的高阶思维并提升核心素养的良机.我们要充分利用章起始课发展学生的高阶思维,提升学生的数学核心素养.

4.4 本节章起始课对本章内容的学习奠定了知识的基础,提供了方法的引领

本节章起始课对本章内容的学习奠定了知识的基础和方法的引领,具体体现在以下两个方面:

(1)为全章内容的学习奠定了知识基础.在本节章起始课中,首先通过金字塔高度的测量问题使学生认识学习相似的必要性(为什么学),归纳、抽象得出相似形的概念.接着通过对不同图形的观察,发现相似图形的基本特征,再通过实验操作,借助学生已有的方法经验,在认知冲突中让学生不断丰富对“相似”的整体认识,把握“相似”的数学本质(学什么),使学生从宏观上整体、系统地

认知本章内容,为进一步研究相似形的性质和判定奠定知识基础.

(2)为全章内容的学习提供了方法的引领.在本节章起始课中,当学生初步理解了相似形的概念后,紧接着让学生根据已有基本活动经验类比全等的知识结构,自己预设建构相似形的知识结构和研究方法框架(如何学).类比全等三角形的性质定理和判定定理,猜想相似三角形的性质定理和判定定理,为后面具体探究相似形的判定和性质定理埋下伏笔.通过类比学习促进了知识、能力、方法的迁移,帮助学生积累数学学习的基本活动经验,为全章内容的学习提供了方法的引领.

总之,本节章起始课在探索学习过程中让学生体会类比的数学思想,使学生经历从“为什么学”到“学什么”再到“如何学”的过程,使学生整体把握本章内容和结构框架、研究方法并形成自己的研究思路,为本章内容的学习做好了铺垫.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部制定.义务教育数学课程标准(2011年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2012.

(上接第34页)

三角函数这块内容应注重化归与转化思想、分类讨论思想、数形结合思想、函数与方程思想等.这些思维能力的形成并非一蹴而就,它是日积月累慢慢形成的一种可持续发展的能力,因此教师在日常教学中一定要重视思维训练.

(4)复习中注重基础套路与变式教学相结合

三角函数模块的内容考查频率高,很多题可以说在平时训练中都见过甚至做过类似的题型,因此基础知识的积累就十分有必要了.一方面不必过于追求所谓的高难度题型,另一方面对于常规题型的解答套路,仍有必要渗透给学生,因为任何难题本质上都是若干问题的组合,基础知识的传授和常见套路的讲解是有必要的.另外,现在的高考题类型多变,教师要注意到多模块知识的融合与串联,多多思考不变本质的变式教学.

(5)严抓书写与格式,养成规范好习惯

从广东高考年报和实际教学、批改试卷和作业的过程中,都反映出一个十分棘手的问题,学生经常出现自以为是的情况,在书写答案过程中肆无忌惮地跳步,有时甚至并未通过书写呈现自己的主干思维过程,或者因为急于求成而将一些重要信息遗漏以至影响最后的答案.例如换元后不书写新变量的定义域很可能造成最后结果的错误.这从侧面要求教师在日常教学过程中切不可只讲思路,而不注重对整体解答过程的板书,长此以往易使学生书写混乱,导致出现不必要的失分.

参考文献

- [1] 广东省教育考试院.广东高考年报(2019)[M],广州:广东高等教育出版社,2020.