破答案之惑　磨研题之术*

●徐　勇　（板浦高级中学,江苏 连云港　222241）

摘　要: 高三数学复习中使用教辅用书,教师与学生不应全盘照搬答案,应有自己独立的思考与理解.一轮复习教辅用书中的好题并非直接用,教师可根据学情磨题,必要时将好题进行简化分解,回归教材,提炼基本题型与常见模型,夯实学生的基本功.

关键词: 参考答案; 数学教材; 一轮复习

中图分类号: O123.1　　文献标识码: A　　文章编号: 1003-6407(2020)05-0031-04

现行高三数学复习通常以一本教辅用书为主,适当进行删减与增补试题,再穿插考试训练.在一轮复习中,教辅用书中常常会选用一些以往考试中所谓的好题或经典题,以增加教辅用书的分量.可实际上,这些所谓的好题与经典题耗去教师与学生的大量时间与精力,也导致教师疲于应付教辅用书,照搬后面的参考答案也就不足为奇了.很多现成的解答并不是最好的解答,有的甚至十分拙劣,千万注意不可盲从,与其被这种解答牵着走,不如自己去想[1].

笔者曾发现同一道题在两届高三所使用的不同教辅用书中出现,教辅用书后面配套的参考答案都不对,更有趣的是用不同的方法得到同样的错误答案.

题目　已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心,$AB=6$,$AC=10$,若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,且 $2x+10y=5$,则 $\cos\angle BAC=$______.

1　错误的参考答案

错解 1　由题设知 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,因为 O 是 $\triangle ABC$ 的外心,所以

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2,$$

因此
$$\frac{1}{2}\times10^2=x\cdot6\cdot10\cos\angle BAC+y\cdot10^2.$$

又 $2x+10y=5$,从而

$$10y=5-2x,$$

于是
$$50=60x\cos\angle BAC+10(5-2x),$$

故
$$\cos\angle BAC=\frac{1}{3}.$$

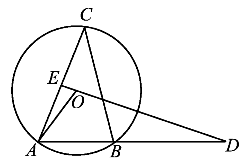

图 1

错解 2　延长 AB 至点 D,使 $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$,取 AC 的中点 E,则 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$(如图 1),从而

$$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=\frac{2}{5}x\overrightarrow{AD}+2y\overrightarrow{AE}.$$

因为 $2x+10y=5$,所以

$$\frac{2}{5}x+2y=1,$$

从而点 D,O,E 共线.又 O 是 $\triangle ABC$ 的外心,E 是 AC 的中点,于是 DE 垂直平分 AC,且 $AD=15$,$AE=5$,故 $\cos\angle BAC=\frac{AE}{AD}=\frac{1}{3}$.

2　“简单”的评讲过程

听课中,一位教师选择让学生讲解本题的思路,具体过程如下:

师: 批改这道题,错误率非常高! 现在哪位同学订正好了,请说说你的思路.

生 1: 说实话,我是看了参考答案才明白的,关键是利用三点共线.由 $2x+10y=5$ 得 $\frac{2}{5}x+2y=1$,让 $\frac{2}{5}x$,$2y$ 分别作为系数,即

$$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{5}x\overrightarrow{AD}+2y\overrightarrow{AE},$$

则点 D,O,E 共线.因为 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,所以

* 收文日期: 2019-12-13; 修订日期: 2020-01-14

基金项目: 江苏省教育科学“十二五”规划 2015 年度立项课题(D/2015/02/097); 江苏省连云港市教学研究 2019 年度第十三期中长期课题(2019/219); 江苏省中小学教学研究第十三期课题(2019JK13-L226)

作者简介: 徐　勇(1980—),男,江苏连云港人,中学高级教师.研究方向: 数学教育.

$$\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}.$$

又 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，E 是 AC 的中点，从而 DE 垂直平分 AC. 由 $AB=6$，$AC=10$ 可知

$$AD=15,\quad AE=5,$$

故

$$\cos\angle BAC=\frac{AE}{AD}=\frac{1}{3}.$$

师：很好！同学们都明白了吗？

生(众)：明白了.

师：我们看下一题……

反思　教师让学生评讲本题的方式不错，该生能将答案看懂并能完整地复述出来，看似以学生为主体，把学生推到前台，但本质上还是教师一言堂，只不过是借个别学生之口. 实际上，一道填空题，答案不对，并不代表学生对此题没有一点想法，教师没有顾及学生的最初思考，而将参考答案提前告诉学生或让学生查看参考答案，在一定程度上让参考答案削弱了数学思维的活力，进而忘却了自己的思考，时间一长或是稍加变式，学生可能又不会做了. 上述过程，师生都默认了点 D，O，E 是3个点，那有没有可能是2个点呢？为什么画草图时将点 O 放在 $\triangle ABC$ 内部，为何不可能在边上或外部呢？这是习惯使然，潜在假设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形.

3　基于问题的微探究

在答题中，学生虽然没能写出答案，但不代表对此题什么都不知. 为了摸清学生是怎么想的，可采用基于问题的微探究方式进行.

师：目标是求 $\cos\angle BAC$，怎样才会出现它？

生2：余弦定理.

生3：向量的数量积.

师：若是使用余弦定理，你想放在哪个三角形中？

生2：当然是 $\triangle ABC$，可惜不知道边 BC 的长，且所给的条件不好推出 BC 的长.

师：这是道填空题，若是大胆猜个答案，你会猜几？

生2：若是这样，我当然想直角三角形啦，结合 $AB=6$，$AC=10$，我猜 $BC=8$，答案为 $\cos\angle BAC=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{5}$. 不好，答案不对啊，参考答案是 $\frac{1}{3}$.

师：别急，看此时与条件是否矛盾.

生2(惊讶表情)：不矛盾，此时 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，又因为 $2x+10y=5$，所以 $x=0$，$y=\frac{1}{2}$. 哦，那就是参考答案不对喽！

师：那参考答案问题究竟出在哪？

师生合作：默认点 D，O，E 共线，从而就有草图中的 $OE\perp AC$. 而实际上，点 O，E 可重复，3个点变2个点. 看来，通常说的三点共线，三点中有可能两点重合，还得注意细节. 本题的正确答案是 $\frac{3}{5}$ 或 $\frac{1}{3}$.

师：若将角看作是向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 的夹角，又该怎么办？

生3：将 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 两边平方，这样既能将条件 $AB=6$，$AC=10$ 用上，还能出现目标 $\cos\angle BAC$，即

$$\overrightarrow{AO}^2=36x^2+100y^2+120xy\cos\angle BAC,$$

但 $|\overrightarrow{OA}|$ 又不知，因此就放弃了.

师：你这步操作是将向量实数化，若想避开求 $|\overrightarrow{OA}|$，还可以通过什么途径让向量实数化？

生4：在等式 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 两边同乘一个向量，如同乘 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，则

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AB}^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB},$$

即

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=x\overrightarrow{AB}^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB},$$

得

$$3=6x+10y\cos\angle BAC.$$

由

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AC}^2,$$

即

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AC}^2,$$

得

$$5=6x\cos\angle BAC+10y.$$

生5(抢答)：只要 $5=6x\cos\angle BAC+10y$ 就够了，对比条件 $2x+10y=5$，立即可得 $\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$. 不好，怎么又是一个答案啊？

师：好，我们来个“慢镜头”，仔细查看求解过程，看看究竟问题出在哪？

师生合作：刚才的求解过程实际上还是消元求解的，可视为由 $2x+10y=5$ 得

$$10y=5-2x,$$

代入 $5=6x\cos\angle BAC+10y$，得

$$5=6x\cos\angle BAC+5-2x,$$

即

$$0=3x\cos\angle BAC-x,$$

刚才的求解中约去了 x，即默认了 $x\neq 0$.

师：能否直接约去 x？

生(众)：不可以，只有当 $x\neq 0$ 时才可以. 即由 $0=x(3\cos\angle BAC-1)$ 得到 $x=0$ 或 $\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$.

当 $x=0$ 时，有 $y=\frac{1}{2}$，代入 $3=6x+10y\cos\angle BAC$ 得

$\cos\angle BAC=\dfrac{3}{5}$; 当 $\cos\angle BAC=\dfrac{1}{3}$ 时,代入 $3=6x+10y\cos\angle BAC$ 得 $3=6x+\dfrac{10}{3}y$. 又 $2x+10y=5$,解得 $x=\dfrac{1}{4}$,$y=\dfrac{9}{20}$.

生 6: 我明白了,原来也可以解出 x,y 的值,关键是运用方程的思想求解.

师: 从方程的视角看,条件中出现了两个未知数 x,y,再加上 $\cos\angle BAC$,便是 3 个未知数,那就需要 3 个方程,除了条件中直接给出的一个方程,还需要构造两个方程,这样才可解. 本题有点"巧",主要是条件"$2x+10y=5$"变形成"$\dfrac{2}{5}x+2y=1$",y 前面的系数 2 很"巧",采用第一种思路构图时出现圆中弦的中点. 若将条件"$2x+10y=5$"改为"$2x+8y=5$",第一种思路基本上就失效了,但仍然可用第二种思路来求解,即再运用向量数量积构造两个方程,运用方程的思想求解.

4　借助核心知识导图,厘清试题内涵

不可否认,本题是一道好题,经典且有难度,很多学生会面临"想不到"这样一个尴尬境地. 对很多学校来说,本题不应出现在一轮复习中,教师不该将其拿过来让学生直接做. 教师可先行一步,在独立做完后感受其难易程度,厘清题中涉及到的知识方法与基本模型,可借助核心知识导图这个技术工具(如图 2),透视这道题,让其"可视化".

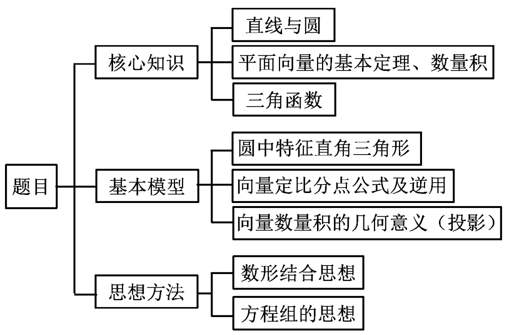

图 2

题中涉及的基本模型具体为:

模型 1　圆中的特征直角三角形,具体为圆中看到弦应想到取中点,连圆心,半径、弦心距、弦长的一半组成一个直角三角形,这个应视为一个自动化反应,立即想到.

模型 2　向量数量积几何意义,运用投影将向量数学积公式简化.

教学中可设计一个问题链,如:

问题 1　求两个向量的数量积,需要知道哪些量?

问题 2　求两个向量的数量积,最少需要哪些量才可求出?

预设　特别地,知道两个向量的夹角是直角,数量积为 0,或其中一个向量是零向量也行.

问题 3　在直角三角形中,斜边所在的向量与直角边所在的向量的数量积怎么求?

方案 1　在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}^2,$$

其中 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

方案 2　在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A=|\overrightarrow{AB}|^2,$$

其中 $|\overrightarrow{AC}|\cos A=|\overrightarrow{AB}|$(实际上,$|\overrightarrow{AC}|\cos A$ 是 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影,是向量数量积的几何意义).

模型 3　向量的定比分点公式及逆用.

在 $\triangle OAB$ 中,C 为直线 AB 上一点,$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$(其中 $\lambda\neq-1$). 求证: $\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$[2].

反之,若改写成

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB},$$

即点 A,B,C 共线的条件. 一般地,若存在两个实数 s,t,且 $s+t=1$,使得 $\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$,则 3 个点 A,B,C 共线.

特别地,当 $\lambda=1$ 时,点 C 是 AB 的中点. 当点 C 与点 A 重合时,$\lambda=0$.

而上述错解中的漏解情形便是忽视了点 O,E 重合的特殊情形,严谨一些. 应去掉"3 个点"的表述,防止思维定势,即为"若存在两个实数 s,t,且 $s+t=1$,使得 $\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$,则点 A,B,C 共线".

5　运用题组分而化之,逐级提升

在一轮复习中,讲这样的难题耗时且低效,可将此题分解,简化问题,即把一个较大或较复杂的问题分解成一些子问题或小问题,然后将每个小问题各个击破,最后自然而然就能应对综合题. 如本题可适度分为两节课来进行讲解. 基于核心知识导图,以题组形式呈现,层层递进,拾阶而上,让学生进行训练,打牢基本功.

第一节课突出数量积中直角这个特征:

例 1　已知向量 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$,$|\overrightarrow{OA}|=3$,那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$______.

设计意图　借助直角三角形这个载体,考查特殊的向量数量积.

例 2 已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，$AB=6$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=$______.

设计意图 隐藏直角，需要学生自己作出特殊的直角三角形，化归为例 1.

例 3 已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，$AB=6$，$AC=8$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.

设计意图 将向量 $\overrightarrow{BC}$ 分解为 $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，将问题化归为例 2.

例 4 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$AC=8$，D 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.

设计意图 突出基底思想，将 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BC}$ 用基底 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 表示.

例 5 已知 $\triangle ABC$，$AB=6$，$AC=8$，点 O 为线段 BC 垂直平分线上一点，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.

设计意图 将三角形的外心进行推广，抓住 $OB=OC$ 这个特征，设 BC 的中点为 D，利用向量数量积的几何意义 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$，将问题转化为例 4.

第二节课重在学习平面向量的基本定理(向量的定比分点公式及逆用)：

例 6 已知 D 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的点，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，若 $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，则 $\frac{n}{m}=$______.

设计意图 课本例题的一个具体应用，回归教材.

例 7 已知 D 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的点，且 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $\frac{BD}{CD}=$______.

设计意图 向量的定比分点公式的逆向应用，探求点 D 的位置.

例 8 已知 D 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的点，$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且 $x-y=1$，则 $x=$______.

设计意图 突出方程思想，也是考查向量定比分点的一个特例，即两个点重合的情形.

例 9 已知 D 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的点，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，若 $AB=6$，$AC=3$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.

设计意图 运用向量定比分点公式将 $\overrightarrow{AD}$ 用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 表示，进而也将 $\overrightarrow{BC}$ 用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 表示. 例 9 考查了向量基底，本质上是考查了平面向量的基本定理.

例 10 已知 D 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的点，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，若 $AB=6$，$AC=3$，$AD=2\sqrt{3}$，则 $\angle BAC=$______.

设计意图 突出向量工具性，利用向量减法与向量定比分点公式得到 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，然后两边平方将向量等式实数化便可得 $\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$，进而可得 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$.

例 11 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$AC=2$，D 为边 BC 上一点，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=5$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______.

设计意图 旨在考查方程思想，将目标 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 看作一个元，较为隐蔽地考查向量的定比分点公式. 即由点 B，C，D 共线，设 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}$，这样条件 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=5$ 与 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}$ 便可整理为关于 x，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的二元方程组，通过消元便可解出 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

对于高三一轮复习，教辅用书不是最主要的，更不是“宝典”，基于学情与课本，可以有针对性地对其删减与补充. 教师与学生对于教辅用书的参考答案，要持审慎态度. 不要一遇到不会的题，就立即翻看参考答案，自己不动脑思考依赖答案，而是要依靠自己的努力克服其中的某些困难. 对经过很大努力仍不能解决的问题，再查看答案，这样才能受到启发与帮助，甚至能发现其错误，也能修改与完善解答. 简言之，教师与学生都要潜心在题上磨，努力达到“会在错综复杂的事物中把握本质，会在杂乱无章的事物中厘清头绪，会在千头万绪的事物中发现规律”[3]. 数学核心素养在解题中表现为“无”中生“有”，认识换汤过程不变的“药”，练就看出来的本领，自然做到“想得到”，当然就不怕“做不到”.

参 考 文 献

[1] 单墫. 解题研究[M]. 南京：南京师范大学出版社，2002：113.

[2] 樊亚东. 普通高中数学课程标准实验教科书·数学(必修 4)[M]. 南京：江苏凤凰教育出版社，2012：71.

[3] 史宁中. 数学基本思想 18 讲[M]. 北京：北京师范大学出版社，2016：12.