

函数与方程思想在解题中的运用

黄康芳

(闽江师范高等专科学校)

摘 要:函数与方程思想是中学数学应用最为广泛的基本思想之一,是解题过程的一个通性方法,可在处理实际应用、数列、不等式、解析几何与立体几何问题过程发挥引导性的关键作用.在应用过程中,需要强化学生的相关知识应用意识,以及对问题进行化简归约的意识,以不断增强学生在相关问题的思维能力,从而促进数学深度学习.

关键词:函数;方程;思想方法

函数与方程的思想是中学数学最具奠基性和总结性,应用最为广泛的基本思想之一.它是人们在概括了大量的数学思维活动之后产生的一种能反映数学问题本质的认识.^[1]函数与方程思想渗透到中学数学各个领域,是历届高考考查的重点内容.

在问题解决中应用函数思想,一般是指构造函数以将问题中的数量关系化归为函数关系并利用所构造函数的性质(定义域、值域、最值、单调性、奇偶性、周期性等)解决原型问题的过程.在问题解决中应用方程思想,一般是指将问题中待求的量设为未知数,将隐含的等量关系化归为方程(组)的等式关系并通过解方程(组)达到解决原型问题的过程.

函数与方程思想可将待解决的问题转化为有固定解决模式的函数与方程问题,二者关系密切:函数式 $y=f(x)$ 可视为二元方程式 $y-f(x)=0$;函数 $y=f(x)$ 的零点即方程 $y=f(x)=0$ 的解;函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象交点的横坐标就是方程 $f(x)=g(x)$ 的解.方程问题和函数问题大都可以相互转化.

构造函数解析式、列方程(组)是应用函数方程思想的关键,中学阶段,应用函数思想时构造的函数主要是低于四次的整式函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等.应用方程思想时列出的方程也大都是上述函数所对应的方程式.

高考通常使用选择题和填空题考查简单应用函数与方程思想的能力,使用解答题在知识网络交汇处深层次考查综合应用函数与方程思想的能力.运用函数与方程思想可以处理与函数建模有关的实际应用问题,也可以处理许多不等式、数列、解几和立几问题.

1 运用函数与方程思想处理实际问题

例 1. 某地区有三个工厂,其位置分别可表示为矩形 $ABCD$ 的顶点 A, B 和 CD 的中点 P 处(如图 1),现已知 $AB=$

20 km, $CB=10$ km,为处理三个工厂排出的污水,须在矩形 $ABCD$ 所在区域上(含边界),且与两点 A, B 等距的点 O 处建一污水处理工厂,然后再铺设排污管道 AO, BO 和 OP .假设排污的管道总长为 y km.

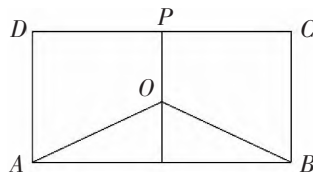


图 1

(I)按以下要求写出函数关系式:

① $\angle BAO=\theta(\text{rad})$,将 y 表示为 θ 的函数关系式;

② 设 $OP=x(\text{km})$,将 y 表示为 x 的函数关系式.

(II)请用(I)中的某个函数关系式,确定污水处理工厂的位置以使得三条排污管道的总长度最短.

分析:将 y 表示成 θ 的函数关系式时, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$;将 y 表示成 x 的函数关系式时, $0 \leq x \leq 10$.对涉及的最值问题可利用函数的单调性进行处理.

解:(I)①由条件知两点 P, O 均在线段 AB 的垂直平分线上,若 $\angle BAO=\theta(\text{rad})$,则 $OA=OB=\frac{10}{\cos\theta}$, $OP=10-10\tan\theta$,

所以 $y=OA+OB+OP=\frac{10}{\cos\theta}+\frac{10}{\cos\theta}+10-10\tan\theta$,

所求函数关系式为 $y=\frac{20-10\sin\theta}{\cos\theta}+10(0 \leq \theta < \frac{\pi}{4})$.

② $OP=x(\text{km})$,则 $OA=OB=\sqrt{(10-x)^2+10^2}=\sqrt{x^2-20x+200}$,
所求函数关系式为 $y=x+2\sqrt{x^2-20x+200}(0 \leq x \leq 10)$.

(II)选用①: $y'=\frac{-10\cos\theta \cdot \cos\theta - (20-10\sin\theta)(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$
 $=\frac{10(2\sin\theta-1)}{\cos^2\theta}$,

令 $y'=0$ 得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$,因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$,所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$,

当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{6})$ 时, $y' < 0$, y 是 θ 的单调递减函数;当 $\theta \in$

$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ 时, $y' > 0$, y 是 θ 的单调递增函数,所以当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时,

$y_{\min}=10+10\sqrt{3}$. 此时, 点 P 恰好位于线段 AB 的垂直平分线上, 且与 AB 距离为 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ km 处.

评析: 运用函数与方程思想处理实际问题时都有一个建立函数模型的过程^[2], 建模时首先要审清题意确定一个自变量, 并用它来表示其它各个变量, 写出函数关系式后, 要依题设确定出自变量的范围. 问题(II)选用函数关系式时, 通过对比, 选出的是一个使问题变得比较简单的关系式.

2 运用函数与方程思想处理数列问题

例 2. 已知等差数列共有 10 项, 其中奇数项之和为 15, 偶数项之和为 30, 则其公差是_____.

分析: 奇数项与偶数项都构成公差为 $2d$ 的等差数列, 列出以等差数列的基本量为未知数的方程组, 求公差可归结为解方程组问题.

解: 设等差数列的首项为 a_1 , 公差为 d , 据题意得:

$$\begin{cases} 5a_1+20d=15 \\ 5a_1+25d=30 \end{cases} \text{ 解得 } d=3, \text{ 填 } 3.$$

评析: 有关等差、等比数列基本量的计算问题大都可使用方程思想进行处理.

例 3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\log_2 \frac{n+1}{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$),

设数列前 n 项和是 S_n , 则使得 $S_n < -5$ 可成立的自然数 n ().

- A. 有最小值 63 B. 有最大值 63
C. 有最小值 31 D. 有最大值 31

分析: 用数列求和公式求得 S_n 的函数式, 再用 $S_n < -5$ 转化为不等式问题.

解: 由 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\log_2 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \right)$

$\frac{n+1}{n+2} = \log_2 \frac{2}{n+2}$, 因为 $S_n < -5$, 所以 $\log_2 \frac{2}{n+2} < -5$, 即 $\frac{2}{n+2} < 2^{-5}$, 所以 $n > 62$, 选 A.

评析: 数列是特殊的函数, 解题过程隐含使用了函数 $S_n = \log_2 \frac{2}{n+2}$ 的单调性.

3 运用函数与方程思想处理不等式问题

例 4. 已知函数 $f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$, $a \leq -2$, 求证: 对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有不等式 $|f(x_1)-f(x_2)| \geq 4|x_1-x_2|$ 成立.

分析: 先关注定义域, 易得, $a \leq -2$ 时 $f'(x)=0$ 的结论, 可假设 $x_1 \geq x_2$, 则 $|f(x_1)-f(x_2)| \geq 4|x_1-x_2|$ 等价于 $f(x_2)+4x_2 \geq f(x_1)+4x_1$, 运用函数与方程思想构造函数 $g(x)=f(x)+4x$ 后, 由 $g(x)$ 的导数判断单调性以探测结论.

解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{a+1}{x} + 2ax =$

$\frac{2ax^2+a+1}{x}$. 因为 $a \leq -2$, 故 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 不妨假设 $x_1 \geq x_2$, 所以 $|f(x_1)-f(x_2)| \geq 4|x_1-x_2|$ 等价于 $f(x_2)-f(x_1) \geq 4x_1-4x_2$, 即 $f(x_2)+4x_2 \geq f(x_1)+4x_1$,

$$\text{令 } g(x)=f(x)+4x, g'(x)=\frac{a+1}{x}+2ax+4=\frac{2ax^2+4x+a+1}{x}.$$

$$\text{于是 } g'(x) \leq \frac{-4x^2+4x-1}{x} = -\frac{(2x-1)^2}{x} \leq 0.$$

从而 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调减少, 故 $g(x_1) \leq g(x_2)$,

即 $f(x_1)+4x_1 \leq f(x_2)+4x_2$, 故对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有不等式 $|f(x_1)-f(x_2)| \geq 4|x_1-x_2|$ 成立.

评析: 利用导数证明不等式的问题时, 往往要运用函数与方程思想构造一个函数, 并使用导数判断函数的单调性.

例 5. 证明不等式:

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right) > \sqrt[3]{3n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

分析: 原不等式可化为 $\frac{(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)}{\sqrt[3]{3n+1}} > 1$,

$n \in \mathbb{N}$, 构造函数 $f(n) = \frac{(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)}{\sqrt[3]{3n+1}}$, 欲证原不等式, 可倚函数单调性证得 $f(n) > 1$.

证明: 构造函数 $f(n) = \frac{(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)}{\sqrt[3]{3n+1}}, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)}{\sqrt[3]{3n+4}} \times \\ &\frac{\sqrt[3]{3n+1}}{(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)} = \frac{(1+\frac{1}{3n+1})\sqrt[3]{3n+1}}{\sqrt[3]{3n+4}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{(3n+1)^3}{(3n+1)^2(3n+4)}}, \end{aligned}$$

又 $f(n) > 0$, 所以 $f(n+1) > f(n)$, 即 $f(n)$ 单调递增, 由 $f(1) = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} > 1$ 可得 $f(n) > f(1) > 1$, 所以原不等式成立.

评析: 对数列型的不等式往往可运用函数思想, 通过函数单调性进行证明. 证法一般步骤为: 要证 $f(n) > g(n)$, 须构造 $h(n)=f(n)-g(n)$, 以证得 $h(n)$ 是单调递增函数, 且 $h(1) > 0$; 或者可构造 $h(n) = \frac{f(n)}{g(n)}$ ($g(n) > 0$), 以证得 $h(n)$ 是单调递增函数, 且 $h(1) > 1$.

4 运用函数与方程思想处理解析几何问题

例 6. 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 且 $a+b+c=0$, 求证: 直线 $ax+by+c=0$ 恒过某一定点.

分析: 证明直线恒过某一定点的问题, 可使用直线系方程的知识将它转化为两条直线的交点问题, 通过解方程组求得定点的坐标. 但也可以直接将它归结为最简单的一元一次方程的问题.

证明: 由 $a+b+c=0$, 且 a, b 不同时为 0, 设 $b \neq 0$, 将 $a=-(b+c)$ 代入直线方程 $ax+by+c=0$, 整理得 $(x-y)+\frac{c}{b}(x-1)=0$,

由 $\frac{c}{b} \in R$ 知关于 $\frac{c}{b}$ 为未知数的一元一次方程 $(x-y) + \frac{c}{b}(x-1) = 0$ 的解集为 R .

所以 $\begin{cases} x-y=0 \\ x-1=0 \end{cases}$ 解得 $x=1, y=1$, 故直线 $ax+by+c=0$ 恒过定点 $(1, 1)$.

评析: 由已知条件 $a+b+c=0$ 容易看出直线 $ax+by+c=0$ 恒过定点 $(1, 1)$, 但无法看出是否还存在其它类似的定点.

例 7. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A 的坐标为 $(-1, -4)$, $\angle B, \angle C$ 的角平分线所在直线的方程分别为 $l_1: y+1=0, l_2: x+y+1=0$, 求边 BC 所在直线的方程.

分析: 通过图象容易看到, 角平分线是其相邻两边所在直线的对称轴, 故点 A 关于直线 $l_1: y+1=0$ 的对称点为 A_1 在 BC 直线上, 点 A 关于直线 $l_2: x+y+1=0$ 的对称点为 A_2 也在直线 BC 上, 求出 A_1 与 A_2 的坐标就可以求出边 BC 所在直线的方程.

解: 设点 $A(-1, -4)$ 关于直线 $l_1: y+1=0$ 的对称点为 $A_1(x_1, y_1)$, 则 $x_1=-1, y_1=2$, 即 $A_1(-1, 2)$, 显然 $A_1(-1, 2)$ 点在直线 BC 上.

再设点 $A(-1, -4)$ 关于 $l_2: x+y+1=0$ 的对称点为 $A_2(x_2, y_2)$,

$$\text{则有 } \begin{cases} \frac{y_2+4}{x_2+1} \cdot (-1) = -1, \\ \frac{x_2-1}{2} + \frac{y_2-4}{2} + 1 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=0, \end{cases} \text{ 显然, 点 } A_2(3, 0) \text{ 也}$$

在直线 BC 上.

易得 A_2 所在的直线方程的两点式为 $\frac{y-2}{0-2} = \frac{x+1}{3+1}$,

即 BC 边所在直线的方程为 $x+2y-3=0$.

评析: 画出图形, 将问题直观化, 就容易找到简单办法. 待定系数法运用的是方程思想.

5 运用函数与方程思想处理立体几何问题

例 8. 如图 2 所示, $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 其底边 $AB=6\sqrt{6}$, 高 $CD=3$, 点 E 是线段 BD 上不同于点 B, D 的一个动点, 点 F 在边 BC 上, 且 $EF \perp AB$, 若沿着 EF 将 $\triangle BEF$ 折起来一直到 $\triangle PEF$ 所在位置, 使得 $PE \perp AE$. 试求四棱锥 $P-ACFE$ 体积的最大值.

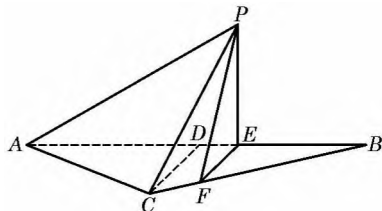


图 2

分析: 容易看出求体积的最大值可转化为求函数的最大值问题, 不妨设 $BE=x$, 可先以 x 表示底面 $ACFE$ 的面积与高, 再写出体积关于 x 的函数表达式, 求函数最值问题可使用导数知识工具.

解: 设 $BE=x$, 四棱锥 $P-ACFE$ 的体积为 $V(x)$. $\because EF \perp AB$, $\angle PEF = \angle BEF$, $\therefore EF \perp PE$, 由已知 $PE \perp AE$, $EF \cap AE = E$, $\therefore PE \perp$ 平面 $ACFE$, $\therefore EF \perp AB$, $CD \perp AB$, $\therefore EF \parallel CD$,

$$\therefore \frac{EF}{CD} = \frac{x}{BD}, \therefore EF = \frac{CD}{BD}x = \frac{x}{\sqrt{6}},$$

$$\therefore S_{ACFE} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{6} \times 3 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}}x^2$$

$$= 9\sqrt{6} - \frac{1}{2\sqrt{6}}x^2,$$

$$\therefore V(x) = \frac{1}{3} S_{ACFE} \times PE = 3\sqrt{6}x - \frac{1}{6\sqrt{6}}x^3 \quad (0 < x < 3\sqrt{6}).$$

求导得 $V'(x) = 3\sqrt{6} - \frac{1}{2\sqrt{6}}x^2$, 由 $V'(x) = 0$, 得 $x=6$ 当 $x \in (0, 6)$ 时, $V'(x) > 0$; 当 $x \in (6, +\infty)$ 时, $V'(x) < 0$, 所以当 $x=6$ 时, $V'(x)$ 取到最大值 $12\sqrt{6}$.

评析: 解决几何图形的动态变化问题, 可分析各个量在变化中的相互关系, 以从中找出一个自变量, 通过构造新的函数以将问题化为函数的求值问题.

总之, 在几何解题过程中, 大都是将问题转化为解三角形问题, 而在代数与解析几何解题过程中, 大都是将问题转化为与函数、解方程或解不等式的问题. 因而, 函数与方程思想在解题中的运用, 代表着数学解题的一个重要转化与化归方向, 是日常数学解题的通性方法, 需要解题者备加关注, 通过强化相关知识的应用意识, 以及对问题进行化简归的意识, 不断增强学生在处理相关问题方面的思维能力, 从而促进学生的数学深度学习^[3].

参考文献:

- [1] 王钦敏, 余明芳. 数学思维素养深度涵育: 教学的进路与方略[J]. 数学教育学报, 2020(6): 56-60.
- [2] 白雪松. 以“函数与方程思想”为例谈数学思想的教学[J]. 中学数学, 2020(7): 30-31.
- [3] 余明芳. 数学教学中促进深度学习的若干路径与策略[J]. 福建中学数学, 2022(10): 25-27.