做题不能追求数量，而要讲究质量，要学会以点带面，多角度理解，只有这样才能跳出题海的怪圈.选择好题，选择成功！为此，我们特推荐以下习题，希望同学们能够融会贯通，学以致用，从多种角度分析思考、积极探索解题规律，摸索出获得最优解法的途径.

不等式与平面向量第一轮复习测试题

■江西　　刘文华

一、选择题

1. 设点 $P(3,-6)$、$Q(-5,2)$，点 R 的纵坐标为 -9，且 P、Q、R 三点共线，则点 R 的横坐标为(　　).

A. -9　B. -6　C. 9　D. 6

2. 不等式 $\log_2\frac{x-1}{x}\geqslant 1$ 的解集为(　　).

A. $(-\infty,-1]$　B. $[-1,+\infty)$

C. $[-1,0)$　D. $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

3. 已知平面内有一点 P 及 $\triangle ABC$，若 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，则(　　).

A. 点 P 在 $\triangle ABC$ 外部　B. 点 P 在线段 AB 上

C. 点 P 在线段 BC 上　D. 点 P 在线段 AC 上

4. 若不等式 $\sqrt{x}>ax+\frac{3}{2}$ 的解集为 $(4,b)$，则实数 b 的值为(　　).

A. 9　B. 18　C. 36　D. 48

5. 若平面向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$ 的夹角是 $180°$，且 $|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{5}$，则 $\boldsymbol{b}=$(　　).

A. $(-1,2)$　B. $(-3,6)$

C. $(3,-6)$　D. $(-3,6)$或$(3,-6)$

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,-1)$ 与 $\boldsymbol{b}=\left(1,\frac{1}{x}\right)$，则不等式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant 0$ 的解集为(　　).

A. $\{x|x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1\}$　B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant0$ 或 $x\geqslant1\}$

C. $\{x|x\leqslant-1$ 或 $0\leqslant x\leqslant1\}$　D. $\{x|x\leqslant-1$ 或 $0<x\leqslant1\}$

7. 如图 1，O、A、B 是平面上的三点，向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，设 P 为线段 AB 的垂直平分线 CP 上任意一点，向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$. 若 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$(　　).

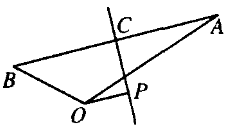

图 1

A. 1　B. 3　C. 5　D. 6

8. 已知 $y=f(x)$ 是偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\frac{4}{x}$，且当 $x\in[-3,-1]$ 时，$n\leqslant f(x)\leqslant m$ 恒成立，则 $m-n$ 的最小值是(　　).

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{2}{3}$　C. 1　D. $\frac{4}{3}$

9. 已知向量 $\overrightarrow{OB}=(2,0)$，$\overrightarrow{OC}=(2,2)$，$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha)$，则向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角 θ 的范围为(　　).

A. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$　B. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12}\right]$　C. $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$　D. $\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$

10. 函数 $y=\log_a(x^2-ax+2)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上恒为正数，则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(0,1)$　B. $(1,2)$　C. $\left(1,\frac{5}{2}\right)$　D. $(2,3)$

11. 向量 $\overrightarrow{OA}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{OB}=(0,1)$，若动点 $P(x,y)$ 满足条件 $\begin{cases}0<\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}<1,\\0<\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}<1,\end{cases}$ 则 $P(x,y)$ 的变动范围(不含边界的阴影部分)是(　　).

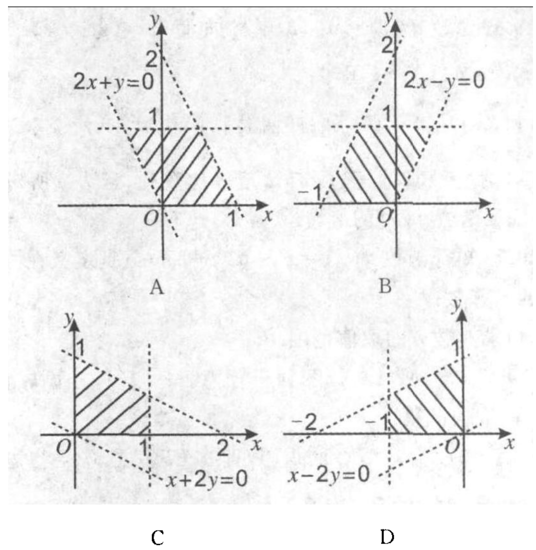

图 2

12. 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $2x^2-a\sqrt{x^2+1}+3>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(2\sqrt{2},+\infty)$　B. $(-\infty,2\sqrt{2}]$

C. $(-\infty,3)$　D. $(-\infty,3]$

二、填空题

13. 如图 3，$\overrightarrow{OA}=3\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{e}_2$，$P$、$Q$ 是线段 AB 的两个三等分点，则 $\overrightarrow{OP}=$____，$\overrightarrow{OQ}=$____.

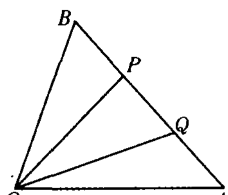

图 3

14. 定义在 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)=-5x+\sin x$，如果 $f(1-a)+f(1-a^2)>0$，则实数 a 的取值范围是____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=4$，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8$，则 $\triangle ABC$ 的面积是____.

16. 三个同学对问题“关于 x 的不等式 $x^2+25+|x^3-5x^2|\geqslant ax$ 在 $[1,12]$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围”提出各自的解题思路.

甲说：“只需不等式左边的最小值不小于右边的最大值.”

乙说：“把不等式变形为左边含变量 x 的函数，右边仅含

常数，求函数的最值.”

丙说：“把不等式两边看成关于 x 的函数，作出函数图像.”

参考上述解题思路，你认为他们所讨论的问题的正确结论，即 a 的取值范围是____.

三、解答题

17. 解关于 x 的不等式 $\frac{a(x-1)}{x-2}>1$.

18. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,2)$，向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$.

(1)求向量 $\boldsymbol{b}$.

(2) $\boldsymbol{t}=(1,0)$，且 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{c}=\left(\cos A,2\cos^2\frac{C}{2}\right)$，其中 A、C 是 $\triangle ABC$ 的内角.若 $\triangle ABC$ 的三内角 A,B,C 依次成等差数列，试求 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的取值范围.

19. 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，其中向量 $\boldsymbol{a}=(2\cos x,1)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x,\sqrt{3}\sin 2x)$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)若 $f(x_0)=1-\sqrt{3}$，且 $x_0\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，求 x_0.

(2)设 $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 成等比数列，且边 b 所对的角为 x，试求函数 $f(x)$ 的值域.

20. 已知奇函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的增函数.

(1)求实数 b 的取值范围.

(2)若 $b^2-tb+1\geqslant f(x)$ 对于任意 $x\in[-1,1]$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

21. 已知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，直线 EF 过点 G 且与边 AB、AC 分别交于 E、F，$\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\beta\overrightarrow{AC}$，求 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 的值.

22. 设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$，已知 $a+b+c=0$，$f(0)f(1)>0$.

(1)证明：方程 $f(x)=0$ 有实根.

(2)证明：$-2<\frac{b}{a}<-1$.

(3)设 x_1、x_2 是方程 $f(x)=0$ 的两个实根，证明：$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant|x_1-x_2|<\frac{2}{3}$.

参考答案与提示

1. D　提示：设点 R 的横坐标为 x_0. $\overrightarrow{PQ}=(-8,8)$，$\overrightarrow{PR}=(x_0-3,-3)$.由 P、Q、R 三点共线，得 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PR}$，即 $(-8,8)=\lambda(x_0-3,-3)$，则 $-8=\lambda(x_0-3)$，$8=-3\lambda$，解得 $x_0=6$.

2. C　提示：由 $\log_2\frac{x-1}{x}\geqslant1$，得 $\frac{x-1}{x}\geqslant2\Leftrightarrow\frac{x+1}{x}\leqslant0\Leftrightarrow x\in[-1,0)$.

3. D　提示：由 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}$，得 $\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AP}$，则点 P 在线段 AC 上.

4. C　提示：令 $\sqrt{x}=t$.由 $x\in(4,b)$，得 $t\in(2,\sqrt{b})$.不等式 $\sqrt{x}>ax+\frac{3}{2}$ 可化为 $at^2-t+\frac{3}{2}<0$.由题意得不等式 $at^2-t+\frac{3}{2}<0$ 的解集为 $(2,\sqrt{b})$，则 2 与 $\sqrt{b}$ 是方程 $at^2-t+\frac{3}{2}=0$ 的两个根.由韦达定理，知 $\begin{cases}2+\sqrt{b}=\frac{1}{a},\\2\times\sqrt{b}=\frac{3}{2a},\end{cases}$ 解得 $b=36$.

5. B　提示：由于平面向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$ 的夹角是 $180°$，可设 $\boldsymbol{b}=(-x_0,2x_0)$ $(x_0>0)$.由 $|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{5}$，得 $\sqrt{(-x_0)^2+(2x_0)^2}=3\sqrt{5}$，解得 $x_0=-3$（舍去）或 $x_0=3$.

6. D　提示：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x-\frac{1}{x}$，则不等式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant0$ 等价于 $x-\frac{1}{x}\leqslant0$，即 $\frac{x^2-1}{x}\leqslant0$，解得 $x\leqslant-1$ 或 $0<x\leqslant1$.

7. D　提示：$\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP})\cdot(-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{OC}\cdot(-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2)=\frac{1}{2}(16-4)=6$.

8. C　提示：当 $x>0$ 时，利用导数知识，易得 $f(x)$ 在区间 $(0,2]$ 上单调递减，在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上的最小值为 $f(2)=4$，最大值为 $f(1)=5$.由 $f(x)$ 是偶函数，得当 $x\in[-3,-1]$ 时，$4\leqslant f(x)\leqslant5$. $m-n=5-4=1$.

9. D　提示：设 $\overrightarrow{OA}=(x,y)$.由 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(x-2,y-2)=(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha)$，得 $x=2+\sqrt{2}\cos\alpha$，$y=2+\sqrt{2}\sin\alpha$. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2x$，$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$. $(x-2)^2+(y-2)^2=(\sqrt{2})^2$，数形结合，可得 $\left(\frac{y}{x}\right)^2$ 的最大值为 $(2+\sqrt{3})^2$，最小值为 $(2-\sqrt{3})^2$. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\leqslant\cos\theta\leqslant\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，则 $\theta\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$.

10. C　提示：令 $t=x^2-ax+2$.若 $0<a<1$，则 $y=\log_a t$ 单调递减，$t=x^2-ax+2$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，故 $y\leqslant\log_a(6-2a)$，这与 y 恒为正数矛盾，从而 $a>1$，$y=\log_a t$ 单调递增.若 $\frac{a}{2}\leqslant2$，即 $a\leqslant4$，则 $t=x^2-ax+2$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，故 $\log_a(6-2a)>0$，即 $6-2a>1$，解得 $a<\frac{5}{2}$；若 $\frac{a}{2}>2$，即 $a>4$，则 $t=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2-\frac{a^2}{4}\geqslant2-\frac{a^2}{4}$，故 $\log_a\left(2-\frac{a^2}{4}\right)>0$，即 $2-\frac{a^2}{4}>1$，解得 $a<2$，这与 $a>4$ 矛盾.

11. A　提示：$\overrightarrow{OP}=(x,y)$.由 $\begin{cases}0<\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}<1,\\0<\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}<1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0<x+\frac{y}{2}<1,\\0<y<1.\end{cases}$

12. C　提示：由题意知：对于任意实数 x，不等式 $a<\frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$ 恒成立.设 $f(x)=\frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}=2\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.令 $t=\sqrt{x^2+1}$，则 $t\geqslant1$，$f(x)=2t+\frac{1}{t}=g(t)$.易得 $g(t)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)\geqslant g(1)=3$，故 $a<3$.

13. $\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$　提示：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=3\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_1$. $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

14. $(1,\sqrt{2})$ 提示：由 $f(-x)=-f(x)$，得 $f(x)$ 为奇函数. 由 $f'(x)=-5+\cos x<0$，得 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减. $f(1-a)+f(1-a^2)>0\Leftrightarrow f(1-a)>-f(1-a^2)=f(a^2-1)\Leftrightarrow\begin{cases}-1<1-a<1,\\-1<1-a^2<1,\\1-a<a^2-1,\end{cases}$ 解得 $1<a<\sqrt{2}$.

15. $4\sqrt{3}$ 提示：设向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 θ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\theta$，即 $8=16\cos\theta$，则 $\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin\theta$.

16. $(-\infty,10]$ 提示：当 $1\leqslant x\leqslant 12$ 时，$x^2+25+|x^3-5x^2|\geqslant ax$ 等价于 $a\leqslant x+\frac{25}{x}+|x^2-5x|$. $x+\frac{25}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{25}{x}}=10$，当且仅当 $x=5$ 时，等号成立；$|x^2-5x|\geqslant 0$，当且仅当 $x=5$ 时，等号成立.

17. 不等式 $\frac{a(x-1)}{x-2}>1$ 等价于 $[(a-1)x-(a-2)]\cdot(x-2)>0$.

(1)当 $a-1>0$，即 $a>1$ 时，不等式 $[(a-1)x-(a-2)]\cdot(x-2)>0$ 可化为 $\left(x-\frac{a-2}{a-1}\right)(x-2)>0$. 当 $a>1$ 时，$\frac{a-2}{a-1}<2$. 原不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{a-2}{a-1}\right)\cup(2,+\infty)$.

(2)当 $a-1=0$，即 $a=1$ 时，不等式 $[(a-1)x-(a-2)]\cdot(x-2)>0$ 可化为 $x-2>0$，则此时原不等式的解集为 $(2,+\infty)$.

(3)当 $a-1<0$，即 $a<1$ 时，不等式 $[(a-1)x-(a-2)]\cdot(x-2)>0$ 可化为 $\left(x-\frac{a-2}{a-1}\right)(x-2)<0$. 当 $\frac{a-2}{a-1}>2$，即 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $\left(2,\frac{a-2}{a-1}\right)$；当 $a=0$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$；当 $a<0$ 时，原不等式的解集为 $\left(\frac{a-2}{a-1},2\right)$.

18. (1)设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$. 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$，得 $2x+2y=-2$. $|\boldsymbol{b}|=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cos\frac{3\pi}{4}}=1=\sqrt{x^2+y^2}$. 联立 $2x+2y=-2$ 和 $\sqrt{x^2+y^2}=1$，解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\y=-1,\end{cases}$ 则 $\boldsymbol{b}=(-1,0)$ 或 $\boldsymbol{b}=(0,-1)$.

(2)由 $\triangle ABC$ 的三内角 A,B,C 依次成等差数列，得 $B=\frac{\pi}{3}$. 由 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{t}=(1,0)$，得 $\boldsymbol{b}=(0,-1)$.

$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\left(\cos A,2\cos^2\frac{C}{2}-1\right)=(\cos A,\cos C)$，则 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=\cos^2A+\cos^2C=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2C)=1+\cos(A+C)\cdot\cos(A-C)=1-\frac{1}{2}\cos(A-C)$.

易得 $-\frac{2\pi}{3}<A-C<\frac{2\pi}{3}$，则 $-\frac{1}{2}<\cos(A-C)\leqslant 1$，故 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|<\frac{\sqrt{5}}{2}$.

19. $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\cos^2x+\sqrt{3}\sin 2x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

(1)由 $f(x_0)=1-\sqrt{3}$，得 $\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由 $x_0\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，得 $2x_0+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$，则 $2x_0+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$，解得 $x_0=-\frac{\pi}{4}$.

(2)由 a,b,c 成等比数列，得 $b^2=ac$. 由余弦定理，得 $\cos x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geqslant\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，则 $0<x\leqslant\frac{\pi}{3}$，故 $\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant f(x)\leqslant 3$.

20. (1)由 $f(x)$ 为奇函数，得 $a=c=0$，则 $f(x)=x^3+bx$. 由 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，得 $f'(x)=3x^2+b\geqslant 0$ 对于任意 $x\in[-1,1]$ 恒成立，即 $b\geqslant -3x^2$ 对于任意 $x\in[-1,1]$ 恒成立，则 $b\geqslant 0$.

(2) $f(x)=x^3+bx$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 $f(1)=1+b$，则 $b^2-bt+1\geqslant 1+b$ 对于任意 $b\in[0,+\infty)$ 恒成立. 当 $b=0$ 时，$b^2-bt+1\geqslant 1+b$ 对于任意实数 t 恒成立. 当 $b>0$ 时，不等式 $b^2-bt+1\geqslant 1+b$ 可化为 $t\leqslant b-1$，则 $t\leqslant -1$.

综上所述，满足题意的实数 t 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

21. 连接 AG 并延长交 BC 于 D，由 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，得 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

设 $\overrightarrow{EG}=\lambda\overrightarrow{GF}$，则 $\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EG}=\lambda\overrightarrow{GF}=\lambda\overrightarrow{AF}-\lambda\overrightarrow{AG}$，故 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AE}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AF}$，即 $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{\alpha}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda\beta}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}$，从而 $\begin{cases}\frac{\alpha}{1+\lambda}=\frac{1}{3},\\\frac{\lambda\beta}{1+\lambda}=\frac{1}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\frac{1}{\alpha}=\frac{3}{1+\lambda},\\\frac{1}{\beta}=\frac{3\lambda}{1+\lambda}.\end{cases}$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{3}{1+\lambda}+\frac{3\lambda}{1+\lambda}=3$.

22. (1)若 $a=0$，则由 $a+b+c=0$，得 $b=-c$，故 $f(0)f(1)=c(3a+2b+c)=-c^2<0$，与已知矛盾，从而 $a\neq 0$. 方程 $f(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=4(b^2-3ac)$. 由 $a+b+c=0$，得 $b=-(a+c)$，则 $\Delta=4\left[\left(a-\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2\right]>0$，故方程 $f(x)=0$ 有实根.

(2)由 $f(0)f(1)>0$，得 $c(3a+2b+c)>0$. 由 $a+b+c=0$，得 $c=-(a+b)$，则 $c(3a+2b+c)>0$ 可化为 $(a+b)(2a+b)<0$，即 $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(2+\frac{b}{a}\right)<0$，故 $-2<\frac{b}{a}<-1$.

(3) $x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}$，$x_1x_2=\frac{c}{3a}=-\frac{a+b}{3a}$. $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{4}{9}\left(\frac{b}{a}+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{3}$. 由 $-2<\frac{b}{a}<-1$，得 $\frac{1}{3}\leqslant(x_1-x_2)^2<\frac{4}{9}$，则 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant|x_1-x_2|<\frac{2}{3}$.

（责任编辑 袁伟刚）