

○ 解题研究 ○

巧用函数的对称性^{*}

——以相关高考试题为例

林清利 卓丽霞

(福建省莆田第一中学, 351100)

对称性是函数的基本性质之一, 它从直观上呈现出函数的姿态, 给人一种“数学美”的视觉冲击, 同时也是激发学生发现美、欣赏美的一个重要载体. 函数的对称性质备受命题者的青睐, 经常出现在高考试题中, 且常考常新, 值得探究.

一、一个函数的对称性

1. 一个函数本身具备对称性

例 1 (2013 年新课标 I 卷第 15 题) 设当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x) = \sin x - 2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos \theta =$ _____.

分析 本题函数可化为 $f(x) = A\sin(x + \varphi)$ 的类型, 从而可以借助直观想象, 分析它的图象、最值、极值、对称轴.

解 $f(x) = \sqrt{5}\sin(x + \varphi)$ (其中 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin \varphi = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$), 则 $x = \theta$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴, 那么 $f(\theta) = \sin \theta - 2\cos \theta = \sqrt{5}$, $f'(\theta) = \cos \theta + 2\sin \theta = 0$, 解得 $\cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

评注 充分利用三角函数的对称性与最值、极值之间的关系可快速破解.

变式 (2022 年新高考 I 卷第 12 题) 函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $f(\frac{3}{2} - 2x)$, $g(2 + x)$ 均为

偶函数, 则()

(A) $f(0) = 0$

(B) $g(-\frac{1}{2}) = 0$

(C) $f(-1) = f(4)$

(D) $g(-1) = g(2)$

分析 本题以抽象函数为载体, 在 2021 年新高考 II 卷第 8 题的基础上又引入了导函数的对称性, 进一步探究原函数与导函数之间的联系, 对考生是一个挑战. 引入特殊函数及其图象观察函数的性质, 从而快速破解本题.

解 依题意 $\forall x \in \mathbf{R}, f(\frac{3}{2} - 2x) = f(\frac{3}{2} + 2x)$, 则 $f(\frac{3}{2} - x) = f(\frac{3}{2} + x)$, 即 $f(x)$

图象关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 对称, 易得 $g(x)$ 图象关于直线 $x = 2$ 对称, 那么 $f(x)$ 图象关于点 $(2, f(2))$ 对称. 令 $f(x) = 2 + \sin \pi x$, 则 $g(x) = \pi \cos \pi x$, 从而选项 A, D 错误, 选项 B, C 正确.

2. 两个函数本身无对称性, 它们的和函数具备对称性

最常见的一类是由 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 构造的奇函数或偶函数. 设下列函数的定义域关于原点对称, 那么它们都具备奇偶性.

* 本文为莆田市教育科学“十四五”规划 2022 年度课题“命题视角下高中数学单元作业的校本化实践研究”(课题编号: PTJYKT22189) 研究成果之一.

$$y = f(x) + f(-x);$$

$$y = f(x) - f(-x); y = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ f(-x), & x < 0; \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ -f(-x), & x < 0. \end{cases}$$

例2 (2019年全国Ⅱ卷文科第6题) 设 $f(x)$ 为奇函数,且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$,则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ _____.

- (A) $e^{-x} - 1$ (B) $e^{-x} + 1$
(C) $-e^{-x} - 1$ (D) $-e^{-x} + 1$

例3 (2019年北京卷理科第13题) 设函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 为奇函数,则 $a =$ _____.

变式1 (2020年全国卷Ⅱ理科第9题) 设函数 $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$ 则 $f(x)$ ()

- (A) 是偶函数且在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调递增
(B) 是奇函数且在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 单调递减
(C) 是偶函数且在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 单调递增
(D) 是奇函数且在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 单调递减

变式2 (2014年湖南卷文科第15题) 已知函数 $f(x) = \ln(e^{3x} + 1) + ax$ 是偶函数,求 a 的值.

分析 $f(x) = \ln(e^{3x} + 1) + ax = \ln \frac{e^{3x} + 1}{e^{-ax}} = \ln(e^{(3+a)x} + e^{ax})$ 从而可以看出
 $a = -\frac{3}{2}$.

变式3 (2018年全国Ⅲ卷文科第16题) 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1$, $f(a) = 4$, 则 $f(-a) =$ _____.

分析 本题的背景是函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的反函数为 $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, 从而 $f(x)$ 为奇函数, $h(x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2})$ 与 $f(x)$ 图象关于 x 轴对称, 故 $h(x)$ 也为奇函数. 一般地 $y = \log_a(bx +$

$$\sqrt{1+b^2x^2}) y = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} \text{ 为奇函数, } y = \ln(e^{ax} +$$

$$1) - \frac{a}{2}x \text{ 为偶函数.}$$

评注 以上几个例题都是基于同样的构造形式,从而结果都是显见的.

高中阶段数学结论较多也容易忘记、混淆,需要我们把问题归类成一些基本模型. 掌握推理基本形式和规则,发现问题和提出命题,探索和表述论证过程,逐步发展学生的数学逻辑推理和数学运算的核心素养.

例4 (2022年全国乙卷文科第16题)

若 $f(x) = \ln \left| a + \frac{1}{1-x} \right| + b$ 是奇函数,则 $a =$ _____, $b =$ _____.

解法1 依题意 $f(x) + f(-x) = 0$ 对定义域内的自变量 x 恒成立. 即 $f(x) + f(-x) = \ln \left| a + \frac{1}{1-x} \right| + \ln \left| a + \frac{1}{1+x} \right| + 2b = \ln \left| \frac{(a+1)^2 - a^2x^2}{1-x^2} \right| + 2b = 0$, 从而 $(a+1)^2 - a^2 = 0$, 得 $a = -\frac{1}{2}$, 则 $b = \ln 2$.

解法2 依题意函数 $f(x)$ 定义域关于原点对称. 由 $a + \frac{1}{1-x} \neq 0$ 可得 $(1-x)(a+1-ax) \neq 0$, 所以 $x = \frac{a+1}{a} = -1$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$, 即函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. 再由 $f(0) = 0$ 可得 $b = \ln 2$. 即 $f(x) = \ln \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-x} \right| + \ln 2 = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ 在定义域内满足 $f(-x) = -f(x)$, 符合题意.

评注 解法1是回归奇函数的定义, 通过代数恒等式确定参数的值, 是最本质的做法. 解法2利用定义域的对称巧妙求解参数的值, 是数学直观的一种解题方式.

3. 两个函数均有对称性, 它们的和函数也具备对称性

例5 (2010年高考福建卷文科数学第22题节选) 设 $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 2 +$

$\frac{3}{x-1}$, 是否存在点 Q , 使得过点 Q 的直线若能
与曲线 $y = g(x)$ 围成两个封闭图形, 则这两个
封闭图形的面积总相等? 若存在, 求出点 Q
的坐标; 若不存在, 说明理由.

分析 观察函数表达式的结构, 不难发现
函数 $y = g(x)$ 是由三次函数 $h(x) = \frac{1}{3}x^3 -$
 $x^2 + 3x - 2$ 与分式型函数 $m(x) = \frac{3}{x-1}$ 通过
加法运算而得的函数. 本题应先探究 $h(x)$,
 $m(x)$ 的对称性. 显然 $m(x) = \frac{3}{x-1}$ 的图象关
于点 $(1, 0)$ 对称, 猜测 $h(x)$ 可能也是中心对
称图形, 下面有几个猜测思路:

思路 1 猜测 $h(x)$ 中心横坐标也为 1, 则
只需再验证 $h(x) + h(2-x)$ 等于定值. 易得
 $h(x) + h(2-x) = \frac{2}{3}$;

思路 2 从特殊情况入手, $h(0) +$
 $h(2) = \frac{2}{3}$, 猜测 $h(x)$ 关于点 $(1, \frac{1}{3})$ 对称;

思路 3 从函数 $h(x)$ 图象入手, 发现它
是单调递增, 那么拐点是其对称中心即点
 $(1, \frac{1}{3})$.

评注 本题以非常见函数为载体, 考查
函数性质, 要求考生从特殊到一般进行归纳,
从图形直观抽象出代数表示, 大胆猜测, 小心
求证, 既锻炼了考生的意志, 又发展了学生的
数学抽象和直观想象核心素养. 本题还隐含
的一个结论即函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的图象
分别关于点 (a, b) , (a, c) 对称则函数 $y =$
 $f(x) + g(x)$ 的图象关于点 $(a, b+c)$ 对称.

二、两个函数之间的对称

例 6 (2018 年全国 III 卷文科第 7 题) 下
列函数中其图象与函数 $y = \ln x$ 的图象关于
直线 $x = 1$ 对称的是 ()

- (A) $y = \ln(1-x)$ (B) $y = \ln(2-x)$
(C) $y = \ln(1+x)$ (D) $y = \ln(2+x)$

例 7 (2011 年新课标卷理科第 12 题) 函数

$y = \frac{1}{1-x}$ 的图象与函数 $y = 2\sin\pi x (-2 \leq$
 $x \leq 4)$ 的图象所有交点的横坐标之和等于
()

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

变式 (2016 年全国 II 卷理科第 12 题)

已知函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x) = 2 -$
 $f(x)$, 若函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 图象的交点
为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i)$
= ()

- (A) 0 (B) m (C) $2m$ (D) $4m$

评注 上面两道试题的命题手法完全一
致, 即考虑两个有公共对称中心的函数的交
点, 并求交点坐标之和, 其表达式与图象都能
体现对称性, 利用对称化解求和. 当然也可以
用特殊值法检验排除选项.

例 8 (2021 年江苏六市联考) 已知曲线
 $y = \ln x$ 在 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点处的切线
分别与曲线 $y = e^x$ 相切于 $C(x_3, y_3), D(x_4,$
 $y_4)$, 则 $x_1x_2 + y_3y_4$ 的值为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{17}{4}$

解法 1 由题意曲线 $y = \ln x$ 在点 $A(x_1,$
 $y_1)$ 处的切线方程为 $y - \ln x_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$, 即
得到 $y = \frac{1}{x_1}x + \ln x_1 - 1$ 曲线 $y = e^x$ 在点 $C(x_3,$
 $y_3)$ 处的切线方程为 $y - e^{x_3} = e^{x_3}(x - x_3)$, 故
 $y = e^{x_3}x + e^{x_3}(1 - x_3)$, 所以由
$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} = e^{x_3}, \\ \ln x_1 - 1 = e^{x_3}(1 - x_3), \end{cases} \quad \text{解得 } \ln x_1 = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}.$$

同理可得 $\ln x_2 = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$, 则 x_1, x_2 是方程
 $\ln x = \frac{x+1}{x-1}$ (*) 的两个解. 将 $\frac{1}{x}$ 代入方程
(*) 也成立, 所以 $x_1x_2 = 1$. 又 $y_3y_4 = e^{x_3}e^{x_4} =$
 $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 1$, 所以 $x_1x_2 + y_3y_4 = 2$, 故答案选 B.

解法 2 本题的背景是函数 $y = \ln x$ 与函

回到定义去

周开炎

(北京市第八十中学,100000)

摘要:本文以一道测试题为例,探究回到定义解题的思考方法,引导学生理解概念、运用概念解决问题.

关键词:回到定义;一题多解;理解定义

在刚刚结束不久的北京市朝阳区高一第一学期期末统一测试中,学生对选择题第4题的解答情况及解题过程值得认真思考,并反思教学过程.

一、试题分析与解答情况

题目 设集合 $A = \left\{ \alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 集合 $B = \left\{ \alpha \mid \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 则 A 与 B 的关系为()

- (A) $A = B$ (B) $A \subsetneq B$
(C) $A \supsetneq B$ (D) $A \cap B = \emptyset$

本题以两个集合间的关系为背景命制试题,集合 A, B 中的元素是角,是学生所熟悉的知识,主要考查学生对集合关系、角的概念的

认识和理解.

试题内容是教学中的重点内容,题型也是学生比较熟悉的形式,但考试结果并不理想,全区约 5 900 人参加考试,得分率是 0.67. 这个结果不仅出乎命题人的预判,也在很多教师的意料之外.

在对部分学生进行问卷调查与访谈后,情况似乎更糟糕,很多学生是“碰巧做对”而得分的. 换句话说,真正将这道题弄懂的同学似乎比预想的少得多. 学生解答情况可分为以下四种情况:

(1) 67% 的同学采用特殊值法,给整数 k 取值,将集合 A, B 用列举法表示;有 54% 的同学选出正确答案 A,其中近半数的同学说不

数 $y = e^x$ 互为反函数,它们的图象关于直线 $y = x$ 对称且关于直线 $y = x$ 对称的两点的横纵坐标是交换的关系,所以本题只需从图形直观入手,易得 A, B, C, D 坐标间的关系. 设 $A(x_1, \ln x_1)$ 由 A, C 处的切线斜率相等,得 $C\left(\ln \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_1}\right)$, 而 B, C 关于直线 $y = x$ 对称,所以 $B\left(\frac{1}{x_1}, \ln \frac{1}{x_1}\right)$. 同理可得 $D(\ln x_1, x_1)$. 从而

$$x_1 x_2 + y_3 y_4 = x_1 \cdot \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} \cdot x_1 = 2.$$

评注 本题改编自 2019 年全国 II 卷理

科第 20 题和 2018 年天津高考理科第 20 题压轴题.

综观近几年高考数学考卷,聚焦立德树人,关注数学本质,发展数学素养,命题更加注重理想思维的考查,减少“机械刷题”的现象,这就促使我们在函数对称性的教学中或命制试题上,更关注从几何直观和代数抽象两方面整体把握函数的对称性.

参考文献

[1] 甘志国. 三次函数图象对称中心的一条性质[J]. 河北理科教学研究, 2014(5): 39-38.