



在高三第一轮复习课上,教师要重点讲解核心知识的构建、解题方法的优化、理性思维的培养、典型错误的辨析、解题思路的探寻和适度的变式拓展,通过归纳总结,提升学生的数学解题能力。

高三第一轮复习教师究竟讲什么*

——以复习课“两角和与差的三角函数”为例

黄智华(南京航空航天大学附属高级中学)

高三第一轮复习的目标是夯实基础,包括“牢固掌握基础知识”“形成熟练的基本技能”“养成运用基本数学思想方法研究问题的意识”“积累丰富的基本活动经验”。如何达成这一目标,很大程度上取决于教师在课堂教学中讲什么、怎么讲。最近听了很多高三第一轮的复习课,发现不尽如人意。下面笔者以一节高三第一轮复习课“两角和与差的三角函数”为例阐述一些个人观点,请同行给予指导。

1 讲核心知识的构建

“两角和与差的三角函数”作为江苏省高考的八个C级考点之一,是高考数学江苏卷中必考的、反复考的知识点,要求学生熟练掌握、灵活运用。对这个知识点的复习,不能仅仅停留在熟记公式、灵活运用公式解题的层面上,而是应该帮助学生重新构建这些知识,包括如何证明“两角和的余弦公式”,如何由“两角和的余弦公式”推导“两角和的正弦公式”,又如何推导出“两角和的正切公式”。证明“两角和的余弦公式”方法多样,利用单位圆通过构造法来证明,本身就可以复习任意角三角函数的定义及几何表示——单位圆中的三角函数线,帮助学生养成应用数学概念解决问题的意识,其中还渗透了数形结合的思想。通过公式的证明不仅可以加深学生对公式的理解,还可以打通知识之间的相互联系,建立完善的知识结构。由“两角和的余弦公式”推导“两角和的正弦公式”体现了转化思想和整体代换思想,揭示了“两角和与差的三角函数”公式的结构特征是用角“ α ”“ β ”的三角函数

值来表示“ $\alpha \pm \beta$ ”的三角函数值。 $\sin(\alpha + \beta) = \cos \cdot \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \beta \right] = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \beta + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 。而推导“两角和的正切公式”的过程更是转化思想的重要体现, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ 。先是正切转化为正弦、余弦的比,化未知为已知,接着就是“弦”化“切”,化异名函数为同名函数,统一用两角的正切来表示两角和的正切。

证明这些公式所用到的数学思想方法在解题中是常用到的,在复习这个知识时,如果不能再次重构这些知识,仅仅是默写公式、运用公式,那么学生对这些公式的认识是不完整的、不深刻的,他们不清楚知识的来龙去脉,不能完整地构建知识网络,就达不到一轮复习知识系统化、网络化、整体化的目的,而且还很有可能成为学生复习的一个盲点。

2 讲解题方法的优化

例1 $\frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

学生给出了以下解法。

解法1:由于 $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$,可分别求出 $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$ 的值,代入即得原式 $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

* 本文系江苏省教育科学“十二·五”重点资助课题“高中学生数学推理的心理学实证研究”(课题编号: B-a/2015/02/027) 的阶段性成果。

解法 2: 由于 $\frac{1-\tan \alpha}{1+\tan \alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, 所以在原式

分子、分母上同除以 $\cos 15^\circ$, 原式 $= \frac{\tan 15^\circ - 1}{\tan 15^\circ + 1} =$

$$-\tan(45^\circ - 15^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

解法 3: 由于 $\sin 15^\circ - \cos 15^\circ = \sqrt{2}\sin(15^\circ - 45^\circ) = -\sqrt{2}\sin 30^\circ$, $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{2}\cos(45^\circ - 15^\circ) = \sqrt{2}\cos 30^\circ$, 所以原式 $= -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解法 4: 由于 $(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ) \times (\sin 15^\circ + \cos 15^\circ) = \sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ = -\cos 30^\circ$, 在原式分子、分母上同乘以 $(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)$, 有

$$\text{原式} = \frac{(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)^2}{(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ) \times (\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)} = \frac{1 - \sin 30^\circ}{-\cos 30^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

解法 5: 分子、分母分别平方, 得 $\left(\frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}\right)^2 = \frac{1 - \sin 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} = \frac{1}{3}$.

因为 $\frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ} < 0$, 所以 $\frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

高三复习时学生已经有了比较完善的知识储备, 也具备了应用数学思想指导解题的意识, 所以一道题目的解答往往能给出多种不同的解法。教师的讲解既要揭示多种解法本质的一致性, 指出多解归一, 更要通过分析比较优化解题方法, 找出最佳方法。本题多种解法本质的一致性就是: 化非特殊角为特殊角, 体现转化的数学思想。“多解归一”寻求不同解法的共同本质, 通过“多解”后的“归一”, 可以形成强大的认知力, 由此获得对数学的通透理解。5种解法中解法 3 和解法 4 符合学生的思维习惯, 学生容易想到, 而且运算量不大, 不容易出错, 书写简洁。教学中能够通过问题的解决揭示数学问题的本质, 就能让学生具有一双透过现象看本质的“慧眼”, 学生的思维能力就能得到充分的发展, 使数学问题的解决变得简单而自然。

3 讲理性思维的培养

例 2 已知 $\tan(\alpha + \beta) = 3$, $\tan(\alpha - \beta) = 5$, 那么 $\tan 2\alpha =$ _____。

学生: 由 $\tan(\alpha + \beta) = 3$, 可得 $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 3$,

即 $\tan \alpha + \tan \beta = 3 - 3\tan \alpha \tan \beta$. ①

由 $\tan(\alpha - \beta) = 5$, 可得 $\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = 5$, 即 $\tan \alpha - \tan \beta = 5 + 5\tan \alpha \tan \beta$. ②

往下学生就不知道怎么做。

理性思维 1: 从条件出发得到的这两个等式的实质是什么? ——关于 $\tan \alpha, \tan \beta$ 的两个方程。

理性思维 2: 由这两个等式可以求得什么? ——通过解方程组可以求得 $\tan \alpha, \tan \beta$ 的值。

理性思维 3: 是先消去 $\tan \alpha$ 求出 $\tan \beta$ 的值, 还是先消去 $\tan \beta$ 求出 $\tan \alpha$ 的值? ——先消去 $\tan \beta$ 求出 $\tan \alpha$ 的值。因为题目需要 $\tan 2\alpha$ 的值, 而 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$.

理性思维 4: 消去 $\tan \beta$ 得到等式 $2\tan^2 \alpha - 7\tan \alpha - 2 = 0$, 需要进一步求出 $\tan \alpha$ 的值吗? ——不需要。

由 $2\tan^2 \alpha - 7\tan \alpha - 2 = 0$, 可得 $2(1 - \tan^2 \alpha) = -7\tan \alpha$, 即 $\frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{7}{2}$. 故 $\tan 2\alpha = -\frac{4}{7}$. 这体现了整体代换思想。增加思维的长度, 往后多想几步, 合理选择方法, 是数学理性思维的重要体现。

理性思维 5: 本题还有其他解法吗? 有。因为 $2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)$, 所以 $\tan 2\alpha = \tan[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha - \beta)} = \frac{3 + 5}{1 - 3 \times 5} = -\frac{4}{7}$. 体现转化与化归数学思想, 设法将所求角“ 2α ”表示为已知角“ $\alpha + \beta$ ”和“ $\alpha - \beta$ ”。

“数学是一种精神, 一种理性精神。”考试大纲关于“个性品质要求”中提到: 崇尚数学的理性精神, 形成审慎思维的习惯。高考历来主张“多考一些思考, 少考一些计算”, 在思维层次上区分考生, 所以教师在讲解中要有意识突出对学生理性思维的培养, 教会学生自己评估解决问题的方案是否合理, 对比选择解决问题的方法, 对解决问题的过程实行自我监控, 这些都是数学理性精神的体现, 也是数学能力与素养的体现。

4 讲典型错误的辨析

例 3 $\sin 17^\circ \sin 34^\circ - \sin 73^\circ \cdot \sin 47^\circ =$ _____。

学生的错误做法: 因为 $17^\circ + 73^\circ = 90^\circ$, $34^\circ + 47^\circ = 90^\circ$, 所以, 原式 $= \sin 90^\circ = 1$ 。

遇到这种情况, 教师怎么做呢? 是找其他学生说出正确答案吗? 显然不可取。必须追问该学生, 原式

怎么会等于 $\sin 90^\circ$? 你用了什么知识来解决的? 或者组织学生展开交流讨论进行辨析, 展示思维过程, 书写完整的解题过程, 实现生生之间的互助, 让做错的学生真正弄清楚错误的原因, 从而掌握正确的数学知识, 让会做的学生能够通过对学生的再次讲解, 加深对知识的理解, 牢固掌握知识。

例 4 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \cos \beta = -\frac{12}{13}, \beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 则 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值为_____。

学生中的典型错误: 因为 $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以 $\cos \alpha < 0$ 。故 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$ 。

因为 $\cos \beta = -\frac{12}{13}, \beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 所以 $\sin \beta < 0$ 。故 $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\frac{5}{13}$ 。

错在哪里? 错误的原因是什么? 有必要让学生展开讨论交流并加以辨析。

$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ 与 $\sqrt{1 - \cos^2 \beta}$ 分别是 $1 - \sin^2 \alpha$ 与 $1 - \cos^2 \beta$ 的算术平方根, 后面就不可能得出是 $-\frac{4}{5}$ 与 $-\frac{5}{13}$ 。

然而 $\cos \alpha, \sin \beta$ 确实是负值, 学生就是想不通问题出在了哪里, 追寻造成错误的根源。

教师就其中一个提问: $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$ 是哪来的?

学生: 由 $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ 变形得来的。

分析过程: 因为 $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, 所以 $\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta$ 。接着就是两边开方, 两边开方应该有“ $\pm$ ”的, 究竟定什么符号呢? 还是“ $\pm$ ”都取?

因为 $\sin \beta < 0$, 所以两边开方只能选“ $-$ ”。因此就得到 $\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\frac{5}{13}$ 。这才是正确的书写和解答。错误的原因就在于“两边开方的时候就要选定符号”, 一旦写成了 $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$ 就意味着两边开方选定了“ $+$ ”, 后面就不可能再出现“ $-$ ”。

对相当一部分学生来说, 他们没有养成严谨的思维习惯, 想当然地添加“ $\pm$ ”, 想要“ $-$ ”就添“ $-$ ”, 也不管它对不对、有没有道理、符合不符合逻辑关系。他们没有真正明白该在哪一步变形的时候确定符号, 他们只知道最后的结果是负的, 所以最后要加上“ $-$ ”。

借着学生的典型错误, 通过加强辨析和诊断, 培养学生严谨的数学思维和科学求真的学习态度, 真正掌握和应用数学知识解决问题。

对学生的典型错误, 教师不能仅仅展示正确的解答, 要组织学生进行探究辨析, 针对学生存在的问题进行认真讲解才是有效的教学。教学中有必要让学生经历“展示错误—辨析错误—纠正错误—正确解答”的过程, 一定要让学生深刻认识到错误的原因。

5 讲解题思路的探寻

例 5 化简: $\frac{\sin 7^\circ + \cos 15^\circ \sin 8^\circ}{\cos 7^\circ - \sin 15^\circ \sin 8^\circ}$ 。

就这个问题, 不少学生无法进行解答, 也有学生给出了下面的解答。

解: $\sin 7^\circ = \sin(15^\circ - 8^\circ) = \sin 15^\circ \cos 8^\circ - \cos 15^\circ \cdot \sin 8^\circ$, $\cos 7^\circ = \cos(15^\circ - 8^\circ) = \cos 15^\circ \cos 8^\circ + \sin 15^\circ \cdot \sin 8^\circ$ 。代入得, 原式 $= \frac{\sin 15^\circ \cos 8^\circ}{\cos 15^\circ \cos 8^\circ} = \tan 15^\circ$ 。

针对学生不会做以及学生给出的上述解法, 教师要带领学生一起来分析题目的结构, 讲清楚解题思路的探寻。首先从“角”上发现, 题目中出现三个角, 分别是 $7^\circ, 15^\circ$ 和 8° , 它们之间存在的关系是 $7^\circ + 8^\circ = 15^\circ$, 从而可以运用“减元”的思想, 用其中两个角表示另外一个角。接下来思考: 究竟是用 $7^\circ = 15^\circ - 8^\circ$, 还是用 $15^\circ = 7^\circ + 8^\circ$, 或者是 $8^\circ = 15^\circ - 7^\circ$? 学生可以逐一尝试, 但更要培养学生的理性思维。观察发现: 分子上 $\sin 7^\circ$ 可以认为是三角函数的一次幂, 而 $\cos 15^\circ \cdot \sin 8^\circ$ 是三角函数的二次幂, 如果把 7° 写成 $15^\circ - 8^\circ$, 利用两角差的正弦公式展开, 得到的也是三角函数的二次幂, 从而可以进行合并运算, 达到化简的目的, 分母同样如此, 而且分子、分母合并化简之后都出现的是乘积形式, 为整个分式的进一步约分化简提供了基础。如果是用 $15^\circ = 7^\circ + 8^\circ$ 或者是 $8^\circ = 15^\circ - 7^\circ$, 利用两角和与差的三角公式展开, 就会出现三角函数的三次幂, 就无法进行化简运算。

对解数学题而言, 难点是解题思路的探寻。教师在教学中不仅要讲怎么解, 更要讲为什么这样解? 要讲清楚怎么会想到这样解的? 不这样解行不行? 还有没有其他解法? 面对一道数学问题, 如何通过观察有效地分析解题思路, 还是有一定规律可循的。就三角函数问题, 主要是从角的变化与关系入手进行思考, 结合研究三角函数名称和幂次的异同进行有选择地变形, 其中体现“消元”思想。

6 讲适度的变式拓展

在讲完上面的例5之后,老师给出了变式练习:

求 $\frac{2\cos 10^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$ 值。

学生首先发现了角的关系: 20° 是 10° 的 2 倍。于是尝试就用二倍角公式展开,将角都统一成 10° 。

原式 $= \frac{2\cos 10^\circ - 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ} = \frac{2\cos 10^\circ(1 - \sin 10^\circ)}{(\cos 10^\circ - \sin 10^\circ)(\cos 10^\circ + \sin 10^\circ)}$ 。到此为止,学生做不下去了。

师生共同分析原因:用二倍角公式展开之后,角都统一成了 10° ,体现了消元思想。但是三角函数幂次上不对等, $2\cos 10^\circ$ 可以看作是三角函数的一次式, $2\sin 10^\circ \cos 10^\circ$ 是三角函数的二次式,分母上也是三角函数的二次式。由于三角函数幂次上的不对等,导致式子不容易化简,反而将式子变得更复杂。怎么办?换个角度看问题,还是从研究角与角之间的关系出发来探寻解题思路。由于 $20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$,且 30° 是特殊角,利用特殊角的三角函数值已知,所以这个关系也能达到消元的目的。究竟是用 $20^\circ = 30^\circ - 10^\circ$ 还是用 $10^\circ = 30^\circ - 20^\circ$ 来消元呢?理性思考发现消去 10° 比较合适。原式 $= \frac{2\cos(30^\circ - 20^\circ) - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} =$

$$\frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ + \sin 20^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3}。$$

变式是指教师有目的、有计划地对现有命题进行合理的转化。教学中能对已有的例、习题进行适度的变式、拓展、引申,可以培养学生积极思考的习惯,可以激活课堂气氛,让学生不时面对新问题、让学生有新的收获,增强学生学习的自信心,提高学生学习的兴趣;同时能做到举一反三、触类旁通,达到深化理解数学知识、方法、思想的目的。

当然,复习中的变式教学要适度,既要切合学生实际,更要符合高考要求。在一次教学中,原问题是:已知 $0 < \beta < \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \frac{12}{13}$,求 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值。解决之后老师给出变式:已知 $0 < \beta < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \frac{12}{13}$,求 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值。

在解决变式问题的过程中,为了确定三角函数值

的符号,要利用已知的三角函数值缩小角的范围,相当于解三角不等式,这与江苏省教学要求不符,与江苏高考试题的难度不相吻合,超出了学生的认知水平,这样的变式教学是不可取的。

7 讲归纳总结的提升

例3解决之后教师要归纳提升:(1)通过研究角之间的关系,实现角之间的互化,缩小角之间的差异,体现消元转化思想,这是解决三角函数问题的基本思路;(2)正确运用三角函数诱导公式、两角和与差的三角公式进行求解,对三角函数公式要做到灵活运用。

讲完了例2和第5题(已知 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\sin \theta =$ _____),教师总结提升:本节课的难点是“角与角之间的转化”。如何有效突破这个难点?解决的对策是:运用换角的方法——用已知角或特殊角表示未知角(所求角),体现转化的数学思想。本节课出现的有: $2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)$, 其中角 $(\alpha + \beta)$ 和 $(\alpha - \beta)$ 是已知角, 2α 是所求角; $\alpha + \beta = \left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, 其中角 $\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$ 和 $\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ 是已知角, $\alpha + \beta$ 是所求角; $\theta = \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}$, 其中 $\theta + \frac{\pi}{4}$ 是已知角, $\frac{\pi}{4}$ 是特殊角。 $10^\circ = 30^\circ - 20^\circ$, 将 10° 转化为特殊的 30° 和 20° 的差,达到消元目的,便于发现分子、分母之间的关系,有利于化简。同理,例5采用 $7^\circ = 15^\circ - 8^\circ$ 转化消元。

本节课最后的归纳总结应该是:解决三角函数问题从以下四个方面进行思考。(1)角——通过研究角与角之间的关系,运用消元的方法,减少不同角的存在,常用的方法是“换角的方法”,突出转化思想;(2)名——研究运算式子中同角三角函数的名称变化,运用同角三角函数关系尽可能化异为同;(3)形——发现运算式子中三角函数在形式上的差异,寻找相互转化的桥梁;(4)幂——观察运算式子中三角函数幂的差异,要设法化为同次幂进行运算。

教师的归纳总结应该提升学生对问题的认识,帮助学生形成常见的思维模式,给学生提供实用性、操作性强的工具,以便学生能快速地解决问题;要培养学生美感与化简意识,培养学生理性思维能力,提高学生的思维品质。