

类型4 $ae^{ax} \geq \ln x$

两边同乘 x , 即 $axe^{ax} \geq x \ln x$, 转化为积型同构式. 不难看出, 我们要将 ax 看成一个整体, 也就是说要将左边的主元统一, 所以两边同乘 x 就达到目标.

类型5 $e^x \geq a \ln(ax - a) - a$

上式可化为 $\frac{e^x}{a} - \ln a \geq \ln(x - 1) - 1$, 注意到

右式中 $\ln$ 的真数为 $x - 1$, 所以两边同时加上 x 得 $e^{x-\ln a} + x - \ln a \geq x - 1 + \ln(x - 1)$, 那么就转化为和型同构式. 仔细观察不难发现, 除了要将 $x - 1$ 看成整体之外, 把 $\frac{e^x}{a}$ 化为 $e^{x-\ln a}$ 也是此题的关键, 它能使对数式、指数式与幂的多项式建立形式的统一, 所以指对互化在同构问题中起到了至关重要的作用.

例4 (2020 全国新高考卷 21 题(2)) 已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$, 若 $f(x) \geq 1$, 求 a 的取值范围.

分析: $ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1$, 整理得 $e^{x+\ln a-1} + \ln a$

$-1 \geq \ln x$, 两边加上 x 凑成同构式 $e^{x+\ln a-1} + x + \ln a - 1 \geq x + \ln x = e^{\ln x} + \ln x$, 根据 $g(x) = e^x + x$ 单调递增, 有 $x + \ln a - 1 \geq \ln x$, 所以 $\ln a \geq \ln x - x + 1$ 恒成立, 解得 $\ln a \geq 0$, 故 $a \geq 1$.

例5 (2018 全国I卷文 21 题(2)) 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$, 证明: 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

分析: 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq e^{x-1} - \ln x - 1$, 只要证明 $e^{x-1} - \ln x - 1 \geq 0$, 配凑成 $e^{x-1} + x - 1 \geq x + \ln x$, 即证 $e^{x-1} + x - 1 \geq e^{\ln x} + \ln x$, 由于 $g(x) = e^x + x$ 单调递增, 所以原命题只要证明 $x - 1 \geq \ln x$, 此命题易证.

从上述的几个例子中我们看出同构思想在高考中的重要地位, 要求学生具有较高的观察、运算和分析能力, 真正实现为高校选拔人才的作用. 同构思想突破常规思路, 为我们解题带来了新的思路, 新的方法, 新的视野.

例谈函数对称性在解题中的应用

江苏省常州市前黄中学国际分校 (213161) 陆 德

函数是中学数学的重要内容, 作为函数基本特性之一的对称性应用甚广. 函数对称性大致有两类: 一类是同一个函数自身的对称性, 另一类是两个不同函数之间的对称性. 能应用函数对称解题的题目一般难度较大, 要求学生具有较强善于发现问题、分析问题、进而解决问题的能力. 本文以其三种模型为例探讨函数对称性问题及其相关应用.

题型一 根据函数自身的对称性

例1 (1) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{ex}{e-x}$, 若 $f(\frac{e}{2021}) + f(\frac{2e}{2021}) + \cdots + f(\frac{2020e}{2021}) = 1010(a+b)$, 求 $a^2 + b^2$ 的最小值;

(2) 已知 $m, n \in R$, 并且 $m + 3n = 1$, 求 $me^m + 3ne^{3n}$ 的最小值;

(3) 已知函数 $f(x) = (2x + a)(|x - a| + |x + 2a|)$ ($a < 0$), 若 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(672) = 0$, 则求满足 $f(x) = 2019$ 的 x 的值.

解析: (1) 由于 $f(x) + f(e-x) = 2$, 设 $S = f(\frac{e}{2021}) + f(\frac{2e}{2021}) + \cdots + f(\frac{2020e}{2021})$, 则 $S =$

$f(\frac{2020e}{2021}) + f(\frac{2019e}{2021}) + \cdots + f(\frac{e}{2021})$. 故 $2S = 2 \times 2020$ 得 $S = 2020 = 1010(a+b)$, 解得 $a+b=2$, 故 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \geq (a+b)^2 - 2 \cdot (\frac{a+b}{2})^2 = 2$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号.

(2) 不妨记 $\begin{cases} m = x, \\ 3n = y, \end{cases}$ 则原题即为已知 $x+y=1$ ($x, y \in R$), 求 $xe^x + ye^y$ 的最小值. 因为 $y=1-x$, 记 $f(x) = xe^x + (1-x)e^{1-x}$, 所以 $f'(x) = (1+x)e^x + (x-2)e^{1-x}$, 当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, $x \geq 1-x$ 进而 $e^x \geq e^{1-x}$, 所以 $f'(x) \geq (1+x)e^{1-x} + (x-2)e^{1-x} = (2x-1)e^x \geq 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增. 注意到 $f(\frac{1}{2}+x) = f(\frac{1}{2}-x)$ 得函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 上单调递减, 因此当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最小值

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}.$$

(3) 注意到 $f\left(-\frac{a}{2}\right) = 0$, $\frac{a-2a}{2} = -\frac{a}{2}$, 又因为 $f\left(-\frac{a}{2} + x\right) = 2x\left(\left|x - \frac{3}{2}a\right| + \left|x + \frac{3}{2}a\right|\right)$, $f\left(-\frac{a}{2} - x\right) = -2x\left(\left|x + \frac{3}{2}a\right| + \left|x - \frac{3}{2}a\right|\right)$, 发现 $f\left(-\frac{a}{2} + x\right) + f\left(-\frac{a}{2} - x\right) = 0$, 所以函数 $f(x)$ 关于点 $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ 对称, 又由 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(672) = 0$, 知 $\frac{1+672}{2} = -\frac{a}{2}$, 解得 $a = -673$, 所以 $f(x) = (2x - 673)(|x + 673| + |x - 1346|) = 2019$, 显然 $0 < 2x - 673 < 2019$ 即 $\frac{673}{2} < x < 1346$, 此时 $f(x) = (2x - 673)(x + 673 + 1346 - x) = 2021$, 解得 $x = 337$.

评注:此类题目题干中并未明确给出函数单调性、对称性等相关信息, 单调性相对比较隐蔽, 透过数据信息、题干结构特征等提炼出函数对称性信息是解决此类复杂问题的重要突破口.

题型二 根据两个函数间的对称性

例2 (1) 已知函数 $y = f(x+1) - 2 (x \in R)$ 为奇函数, $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$, 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 求 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i)$ 的值;

(2) 设函数 $y = f(x)$ 与 $y = 2^{x+a}$ 的图象关于直线 $y = -x$ 对称, 且 $f(-2) + f(-4) = 1$, 求 a 的值.

解: (1) 由函数 $y = f(x+1) - 2$ 为奇函数, 知函数 $f(x)$ 图象关于点 $(1, 2)$ 对称, 又函数 $g(x) = \frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 2$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对称, 因此两函数图象的交点也关于点 $(1, 2)$ 对称, 则有 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m y_i = \frac{m}{2}(2+4) = 3m$.

(2) 设 (x, y) 是函数 $y = f(x)$ 的图象上任意一点, 它关于直线 $y = -x$ 对称的点的坐标为 $(-y, -x)$, 由题意知 $(-y, -x)$ 在函数 $y = 2^{x+a}$ 的图象上, 所以 $-x = 2^{-y+a}$, 解得 $y = -\log_2(-x) + a$, 即 $f(x) = -\log_2(-x) + a$, 所以 $f(-2) + f(-4) = -\log_2 2 + a - \log_2 4 + a = 1$, 解得 $a = 2$.

评注: (1) 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = g(x)$ 的图象都关于直线 $x = a$ 轴对称, 两个图象交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则所有交点关于直线 x

$= a$ 对称分布, 对于每一对对称点都有 $x_1 + x_1' = 2a$; (2) 若函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = g(x)$ 的图象都关于点 (a, b) 中心对称, 两个图象交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 所有交点关于点 (a, b) 中心对称分布, 对于每一对对称点都有 $x_1 + x_1' = 2a$, $y_1 + y_1' = 2b$.

题型三 根据两函数间部分点的对称性

例3 (1) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ ax^2 + x, & x < 0, \end{cases}$

其中 $a > 0$, 若函数 $y = f(x)$ 的图像上恰好有两对关于 y 轴对称的点, 求实数 a 的取值范围;

(2) 已知函数 $f(x) = \ln x - x^2$ 与 $g(x) = (x-2)^2 - \frac{1}{2x-4} - m$ 的图像上存在关于 $(1, 0)$ 对称的点, 求实数 m 的取值范围;

(3) 若函数 $f(x) = e^x + x^3 - \frac{1}{2}x - 1$ 的图像上有

且仅有两点 P_1, P_2 , 使得函数 $g(x) = x^3 + \frac{m}{x}$ 的图像上存在两点 Q_1, Q_2 , 且 P_1 与 Q_1, P_2 与 Q_2 分别关于坐标原点对称, 求实数 m 的取值集合.

解: (1) $y = ax^2 + x (x < 0)$ 关于 y 对称的曲线为 $y = ax^2 - x (x > 0)$, 因为函数 $y = f(x)$ 的图像上恰有两对关于 y 轴对称的点, 所以方程 $\ln x = ax^2 - x$ 有两个不等的正实数根, 故 $a = \frac{x + \ln x}{x^2}$ 有两个

正根. 记 $p(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$, 所以 $p'(x) =$

$\frac{1-x-2\ln x}{x^3}$, 记 $r(x) = 1-x-2\ln x$, 所以 $r'(x) = -1 - \frac{2}{x} < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $r(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $r(1) = 0$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时 $r(x) > 0$, 从而 $p'(x) > 0$, $p(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时 $r(x) < 0$, 从而 $p'(x) < 0$, $p(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 因为 $p(1) = 1$ 且 $x \rightarrow 0$ 时, $p(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $p(x) \rightarrow 0$, 所以 a 的取值范围为 $(0, 1)$.

(2) 函数 $f(x)$ 关于 $(1, 0)$ 对称的函数是 $y = -f(2-x) = -\ln(2-x) + (2-x)^2$, 因此 $y = -f(2-x)$ 和 $g(x)$ 有交点, 即 $(x-2)^2 - \frac{1}{2x-4} - m = -\ln(2-x) + (2-x)^2$, 整理得方程 $m = \ln(2-x) - \frac{1}{2x-4}$ 有解. 令 $t = 2-x > 0$, 所以 $m = \ln t + \frac{1}{2t}$. 记 $g(t) = \ln t + \frac{1}{2t}$, $g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} = \frac{2t-1}{2t^2}$, 当 $t \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $g'(t) < 0$, 函数单调递减; 当 $t \in$

$(\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $g'(t) > 0$, 函数单调递增. 故当 $t = \frac{1}{2}$ 时, 函数取得最小值 $g(\frac{1}{2}) = 1 - \ln 2$, 所以 $m \geq 1 - \ln 2$.

(3) 因为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像上有两对点关于坐标原点对称, 则方程 $e^x + x^3 - \frac{1}{2}x - 1 = x^3 + \frac{m}{x}$ 有两不等实根, 即方程 $m = xe^x - \frac{1}{2}x^2 - x (x \neq 0)$ 有两不等实根. 令 $p(x) = xe^x - \frac{1}{2}x^2 - x (x \neq 0)$, 所以 $p'(x) = (x+1)(e^x - 1)$. 令 $p'(x) = 0$ 得 $x = 0$ 或

$x = -1$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $p'(x) < 0$, $p(x)$ 单调递减; 当 $x > 0$ 或 $x < -1$ 时, $p'(x) > 0$, $p(x)$ 单调递增. 即 $p(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值且 $p(-1) = \frac{e-2}{2e}$. 所以, m 的取值集合是 $\{\frac{e-2}{2e}\}$.

评注: 两函数 $f(x)$, $g(x)$ 图像上存在若干组点关于直线或点对称问题一般先求出一个函数 $f(x)$ 图像对称后的解析式 $h(x)$, 然后建立方程 $h(x) = g(x)$, 由此将图像对称问题转化成了方程有解问题. 此类问题本质上依然是利用两个函数间的对称性, 考查了转化与化归的能力, 其综合性较强.

一类条件最值问题的快速解法*

福建省龙岩市高级中学 (364000) 李桂英

基本不等式是求解函数最值问题的一个有效工具, 不仅是高中数学教学的重点, 而且是高考考查的一个热点. 然而, 学生在应用基本不等式求最值时, 往往因为不知如何获取“和为定值”或“积为定值”导致无法运用基本不等式正确求解出最值. 而灵活应用已知条件去构造、去变形从而获得“定值”又是此类问题的难点. 针对学生不能灵活获取“定值”的实际, 笔者在教学实践中, 探寻了一种既能降低构造“定值”这个难点, 同时又能快速准确求出一类条件最值问题, 本文将结合教学实践, 例说此类条件最值问题的快速解法.

1 一个重要结论

结论 如果实数 $a > 0, b > 0, m > 0, n > 0$, 那么 $\frac{m}{a} + \frac{n}{b} \geq \frac{(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2}{a+b}$, 当且仅当 $\frac{\sqrt{m}}{a} = \frac{\sqrt{n}}{b}$ 时, 等号成立.

证明: 因为 $a > 0, b > 0, m > 0, n > 0$, 所以 $(a+b)(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}) = m + \frac{an}{b} + \frac{bm}{a} + n \geq m + n + 2\sqrt{\frac{an}{b} \cdot \frac{bm}{a}} = m + n + 2\sqrt{mn} = (\sqrt{m} + \sqrt{n})^2$, 所以 $\frac{m}{a} + \frac{n}{b} \geq \frac{(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2}{a+b}$, 当且仅当 $\frac{an}{b} = \frac{bm}{a}$, 即 $\frac{\sqrt{m}}{a} = \frac{\sqrt{n}}{b}$

$= \frac{\sqrt{n}}{b}$ 时等号成立.

本文所涉及的一类条件最值问题主要具有以下两个特点: (1) 题中涉及两个变量, 而且都是正实数; (2) 题中涉及的代数式, 其中一个形如 $ax + by$ 的整式, 另一个是形如 $\frac{m}{x} + \frac{n}{y}$ 的分式, 包括在此基础上进行适当的变形.

此类条件最值问题的常规解法是通过常值代换后利用基本不等式来求解. 若能灵活应用本文定理求解, 便可避免常值代换, 使此类问题直接快速得到求解.

2 应用

例 1 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $2a + b = 3$, 求 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{b}$ 的最小值.

解析: 依据结论有 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{b} \geq \frac{(1+1)^2}{2a+b} = \frac{4}{3}$, 当且仅当 $\frac{1}{2a} = \frac{1}{b}$, 即 $a = \frac{3}{4}, b = \frac{3}{2}$ 时等号成立, 故 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是 $\frac{4}{3}$.

* 本文系 2022 年龙岩学院面向龙岩市基础教育教学改革研究项目: 新课标下数学师范生解题能力的培养研究 (课题编号: 2022JCJY14) 的阶段性研究成果.