

重方法,求效益:活用函数与方程思想

●江苏省南菁高级中学 过家福

摘要:函数与方程思想是四大数学思想之一,也是高考中的重要考点之一.在解决一些非函数与方程问题时,借助函数或方程的转化,将不等式、数列、三角函数、平面向量、解析几何与立体几何等相关问题转化为对应的函数或方程问题,实现化归与转化,进而利用函数或方程来分析求解,引领并指导复习备考.

关键词:函数;方程;思想;不等式;数列

作为中学数学中最基本的思想之一——函数与方程思想,在历年高考数学题中都占有比较大的比重,各种难易程度、各类题型都可能涉及.利用函数的概念、性质、运算、图象等来分析、转化与解决问题就是函数思想;利用数量关系,通过方程、不等式及其二者的交汇等数学模型的构建来分析、处理与解决问题就是方程思想.利用函数与方程思想,重在提炼技巧方法,提升解题效益.

1 在不等式中的应用

不等式与函数、方程之间构建特殊的一一对应关系,利用这个特殊关系,经常可以将不等式问题转化为相应的函数(或方程)来处理,借助函数的图象与性质,或方程的解或零点等知识加以巧妙转化,很好用来处理涉及代数式的大小关系、不等式恒成立以及抽象不等式等相关问题.

例 1 已知实数 a 满足 $0 < a < 1$, 则 $a, a^a, e^a - 1$ (其中 e 为自然对数的底数)三者的大小关系正确的是().

- A. $e^a - 1 < a < a^a$ B. $a^a < a < e^a - 1$
C. $a^a < e^a - 1 < a$ D. $a < e^a - 1 < a^a$

分析:根据题目条件,通过构造函数 $f(x) = e^x - x - 1 (x > 0)$, 利用导数研究函数的单调性,进而确定 $e^a - 1$ 与 a 的大小关系;再利用指数函数的单调性进一步确定 a 与 a^a 的大小关系即可.

解析:设函数 $f(x) = e^x - x - 1, x > 0$, 求导则有 $f'(x) = e^x - 1 > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 且 $f(0) = 0$.

于是 $f(x) > 0$, 所以 $e^x - 1 > x$, 即 $e^a - 1 > a$.

又指数函数 $y = a^x (0 < a < 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 所以 $a > a^a$, 从而 $e^a - 1 > a > a^a$.

故选择答案: B.

点评:在解决一些相关的不等式问题中,经常借助不等式之间的结构特征等形式,利用不等式与函数或方程之间特殊的对应关系,合理构建相应的函数或

方程,进而借助函数或方程的求解与应用来解决相应的不等式问题.

2 在数列中的应用

数列是一类特殊的函数模型,是涉及项数 n 所对应的正整数的函数模型,特别是相关数列的通项公式与前 n 项和公式等函数类问题,可以根据题目条件转化为对应的函数或方程来处理,解决一些涉及最值或取值范围的应用问题,注意其中项数 n 必须是正整数这一特殊限制条件.

例 2 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = \frac{3}{2}, a_n + 2a_{n+1} = 0$, 则 $S_n - \frac{1}{S_n}$ 的最大值与最小值的积为_____.

分析:根据题目条件,结合等比数列的定义确定对应的公比,通过等比数列的前 n 项和公式确定 S_n 的表达式,利用参数 n 是奇数与偶数的不同情况进行分类讨论,从而确定函数 S_n 的单调性及取值范围,进而求解对应数列关系式的值.

解析:由 $a_n + 2a_{n+1} = 0$, 可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{1}{2}$, 所以等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $-\frac{1}{2}$.

$$\text{由 } a_1 = \frac{3}{2}, \text{ 得 } S_n = \frac{\frac{3}{2} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

当 n 为奇数时, $S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, S_n 随着 n 的增大而减小, 于是 $1 < S_n \leq S_1 = \frac{3}{2}$, 故 $0 < S_n - \frac{1}{S_n} \leq \frac{5}{6}$.

当 n 为偶数时, $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, S_n 随着 n 的增大而增大, 于是 $\frac{3}{4} = S_2 \leq S_n < 1$, 故 $-\frac{7}{12} \leq S_n - \frac{1}{S_n} < 0$.

所以 $S_n - \frac{1}{S_n}$ 的最大值与最小值分别为 $\frac{5}{6}, -\frac{7}{12}$.

因此 $S_n - \frac{1}{S_n}$ 的最大值与最小值的积为 $\frac{5}{6} \times (-\frac{7}{12}) = -\frac{35}{72}$.

故填答案: $-\frac{35}{72}$.

点评: 数列是一类定义域为正整数集或其有限子集的特殊函数, 回归本质, 借助函数或方程的知识来解决数列中的相关问题, 是破解数列应用问题比较常见的一种思维方式. 只是解题过程中要注意数列问题中项数 n 的取值为正整数, 涉及的函数或方程具有离散性特点.

3 在三角函数中的应用

三角函数中有关三角方程根的计算问题、含参的三角函数或三角方程的求参问题等, 经常转化为函数关系, 利用相应函数的图象与性质求解, 或转化为方程问题, 利用方程有解的情况来分析处理.

例 3 若方程 $\cos^2 x - \sin x + a = 0$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 上有解, 则实数 a 的取值范围是_____.

分析: 根据题目条件, 可以将对应的含参三角方程分离参数, 结合函数的构建, 利用限制条件下的二次函数的值域求解来确定实数 a 的取值范围; 也可以进行换元处理, 化方程问题为对应的函数问题, 利用方程在给定区间上有根的条件构建不等式(组)来处理.

解法 1: 把方程 $\cos^2 x - \sin x + a = 0$ 变形为 $a = -\cos^2 x + \sin x$.

构建函数 $f(x) = -\cos^2 x + \sin x, x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 则有 $f(x) = -(1 - \sin^2 x) + \sin x = (\sin x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$.

由 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 得 $\sin x \in (0, 1]$. 结合二次函数的图象与性质, 可得 $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1]$.

所以 a 的取值范围是 $(-1, 1]$.

故填答案: $(-1, 1]$.

解法 2: 令 $t = \sin x$, 由 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 可得 $t \in (0, 1]$, 代入方程并整理可得 $1 - t^2 - t + a = 0$.

依题意则知二次方程 $t^2 + t - 1 - a = 0$ 在 $t \in (0, 1]$ 上有实数解.

构建二次函数 $f(t) = t^2 + t - 1 - a$, 可知其图象是一条开口向上、对称轴为 $t = -\frac{1}{2}$ 的抛物线, 如图 1 所示.

那么方程 $f(t) = 0$ 在 $(0, 1]$

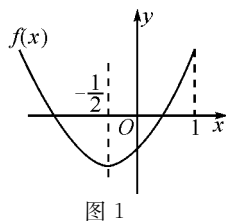
上有解等价于 $\begin{cases} f(0) \leq 0, \\ f(1) \geq 0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} -1 - a \leq 0, \\ 1 - a \geq 0. \end{cases}$$

解得 $-1 < a \leq 1$, 所以 a 的取值范围是 $(-1, 1]$.

故填答案: $(-1, 1]$.

点评: 在解决一些含参的三角函数问题中, 经常可以利用整体化思维或换元思维, 将三角函数问题转化为对应的二次函数或二次方程问题, 巧妙利用二次函数的图象与性质、二次方程根的分布情况等来数形结合, 直观形象地解决相应的三角函数的应用问题, 实现问题的合理转化与巧妙破解.



4 在平面向量中的应用

有关平面向量中的模或夹角的计算问题、参数的求值或取值范围问题等, 经常结合平面向量的数量积公式, 或利用坐标法等, 化归转化为对应的函数关系, 借助相关函数的图象与性质来分析求解.

例 4 设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$, 则 $|\vec{a} + x\vec{b}| (x \in \mathbf{R})$ 的最小值为_____.

分析: 根据题目条件, 通过对所求平面向量的模进行平方处理, 结合数量积公式加以展开, 转化为关于 x 的二次函数问题, 利用二次函数的图象与性质来确定相应的最值问题即可.

解析: 由于 $|\vec{a} + x\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + 2x\vec{a} \cdot \vec{b} + x^2\vec{b}^2 = x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, 因此当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $|\vec{a} + x\vec{b}|$

取得最小值 $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故填答案: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

点评: 有关平面向量模的问题, 通常利用平方法处理, 将平面向量问题转化为对应的平面向量的数量积问题, 从而构建函数或方程模型, 利用函数与方程的思想来合理转化与巧妙破解. 在解决一些最值或取值范围问题中经常用到此思想方法.

5 在解析几何中的应用

涉及解析几何中有关直线与圆锥曲线位置关系的问题, 经常借助联立方程组, 转化为对应的方程问题, 利用相关的求值合理构建相应的函数等. 例如, 解决一些涉及长度、角度、代数式等要素的最值、取值范围等相关问题, 以及定点、定值的判断与证明等问题时, 经常离不开函数与方程思想.

例 5 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 和点 $M(\frac{a^2-b^2}{a}, 0)$, 若存在过点 M 的直线交 C 于 P, Q 两点, 满足 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{MQ} (0 < \lambda < \frac{1}{2})$, 则椭圆 C 的离心率的取值范围是().

- A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. B. $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
C. $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ D. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

分析: 根据题目条件, 设 $T(x, y)$ 是椭圆 C 上的任一点, 利用平面上两点间的距离公式构建 $|TM|^2$ 的函数关系式, 结合关于 x 的二次函数的单调性, 将问题进一步转化为 $\frac{|A_2M|}{|MA_1|} < \frac{1}{2}$, 进而确定椭圆 C 的离心率的取值范围.

解析: 设 $T(x, y)$ 是椭圆 C 上的任一点, 而 $M(\frac{c^2}{a}, 0)$, 则 $|TM|^2 = (x - \frac{c^2}{a})^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - \frac{2c^2}{a}x + \frac{c^4}{a^2} + b^2$, 所以 $|TM|^2$ 在 $x \in [-a, a]$ 上单调递减.

设 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$. 由题意可知, 只要 $\frac{|A_2M|}{|MA_1|} < \frac{1}{2}$ 即可.

由 $\frac{|A_2M|}{|MA_1|} < \frac{1}{2}$, 得 $\frac{a - \frac{c^2}{a}}{\frac{c^2}{a} + a} < \frac{1}{2}$, 则有 $a^2 < 3c^2$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{3} < e < 1$.

故选择答案: C.

点评: 解决解析几何中范围问题的关键是通过直线、曲线等相关方程的转化, 构建对应的函数或方程关系, 借助函数的基本性质、方程有解的条件等构建相关关系式, 进而求解最值、取值范围、定点、定值等相关解析几何问题.

事实上, 函数与方程思想在其他相关知识中的用处也是非常大, 主要是根据题意, 构造恰当的函数, 利用函数基本性质或函数图象加以解决; 或建立相应的方程, 利用方程的解、方程有根的条件推理分析等. 从不同层面加以化归转化, 化难为易, 化生为熟、化繁为简, 从而解决一些相关的综合与应用问题. **[Z]**

(上接第 26 页)

例 3 已知 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$, 求 $f(\frac{1}{2021}) + f(\frac{2}{2021}) + \dots + f(\frac{2019}{2021}) + f(\frac{2020}{2021})$ 的值.

解析: 由题意可知, 函数 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ 的图象关于点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 中心对称, 则 $f(x) + f(1-x) = 1$. 令

$$S = f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \dots + f\left(\frac{2019}{2021}\right) + f\left(\frac{2020}{2021}\right).$$

倒序得

$$S = f\left(\frac{2020}{2021}\right) + f\left(\frac{2019}{2021}\right) + \dots + f\left(\frac{2}{2021}\right) + f\left(\frac{1}{2021}\right).$$

两式相加, 得 $2S = 2020$. 故 $S = 1010$.

例 4 设函数 $f(x) = \frac{2011^{x+1} + 2010}{2011^x + 1} + 2012 \sin x$, $(x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ 的最大值为 M , 最小值为 N , 那么 $M + N =$ _____.

解析: $f(x) = \frac{2011^{x+1} + 2010}{2011^x + 1} + 2012 \sin x$

$$= 2011 - \frac{1}{2011^x + 1} + 2012 \sin x.$$

$$\text{令 } g(x) = 2011 - \frac{1}{2011^x + 1}, h(x) = 2012 \sin x.$$

如前所述, 则 $g(x)$ 显然以 $(0, \frac{4021}{2})$ 为对称中心, 且在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数.

而 $y = \sin x$ 在 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上也为增函数且为奇函数, 所以 $f(x)$ 在 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数.

$$\text{故 } M = f\left(\frac{\pi}{2}\right), N = f\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{又 } h\left(\frac{\pi}{2}\right) + h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, g\left(\frac{\pi}{2}\right) + g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4021.$$

$$\text{故 } M + N = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) + g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4021.$$

总之, 以上内容最大限度地挖掘了教材中函数奇偶性在研究函数图象对称性上的应用, 并对指数型分式函数模型的图象特点作了深入全面的研究, 挖掘了教材内涵. **[Z]**