案例分析

高中数学解题中导数的应用分析
——以“导数求解函数”为例

邓家利

（安徽省泗县第二中学，安徽宿州，234300）

摘　要：导数运用于数学解题中，不仅深化了学生对不同函数形态的理解，而且还激发出学生自身的创造性思维，将其运用于函数问题的求解中，则能使学生自身的解题正确率和效率得到有效提高，并提供给学生强有力的解题工具.鉴于此，本文主要对导数运用于函数问题求解中的作用进行探析，并提出导数求解函数题的具体策略.

关键词：高中数学；导数；函数；解题

高中数学的课堂教学当中，导数是极其重要的一个知识点，其不仅包含了大量的数学思想，而且还是实现便捷、高效解题的重要工具.近些年，高考数学中，愈来愈注重导数解题的相关内容，且已经成了学生实现高效解题过程中必不可少的工具.在对导数进行考查的时候，通常可由三个方面开展，第一，对导数的定义、求导公式、求导用到的法则进行考查；第二，对导数相对简单地运用实施考查；第三，将导数和其他的知识相结合加以考查.实际上，导数和函数有效结合的考查是极其常见的一种方式，由此可知，通过导数进行函数题解答进行探究是极其必要的.鉴于此，数学教师在开展解题教学时，需注重导数内容的讲解，让学生学会通过导数解决相关函数问题，从而使学生实现高效解题的同时，为其后期的学习奠定夯实的基础.

1　导数及其应用于函数求解的作用

1.1　导数的有关概述

导数是微积分当中包含的重要概念，在对导数加以计算时，若自变量增量逐渐趋向于零时，因变量所对应的增量就回转换成自变量与因变量的极限.若函数中存有导数的时候，就能称作为函数值可以求导[1].高中数学的具体教学内容中，函数是极其重要的内容，不论是函数知识的学习，还是函数问题求解，对于高中生而言，都是十分困难的.函数问题的常规求解方法有许多，但是，导数的运用，则能使函数题的解答更加便捷、更加简单.因此，在对函数题进行求解时，需注重导数的合理运用，这不仅能够使函数问题得到有效简化，而且还能使学生更好地求解出问题的答案.

1.2　导数及其应用于函数求解的作用

首先，有助于学生充分掌握相关函数思想.高中数学中，函数思想通常是学生对于数学知识学习整个阶段中的基础性数学思想，属于高考过程考查的重点内容.随着学生自身学习难度的逐渐增加，部分常见的数学解题方法在应对高难度数学题时，就会呈现出大量计算，并致使学生陷入反复计算的困境，类似于对思维能力有着显著要求的函数类问题.这种状况下，数学教师可引导学生在进行试题练习时，试着通过数学模型进行函数关系的创设，以实现数学题目高效解答的效果[2].而导数运用于函数问题的解答，则能有效地构建出数学模型，促进数学模型在解题中的作用充分发挥.通过导数实施函数问题解答，可以使学生自身的函数思想得到进一步深化，也就是说，学生能够将导数看作为对函数问题进行有效解答的辅助工具，经过函数与数形结合两种思想的共同运用，运用导数进行数学模型有效创设，从而使学生更好地解决复杂的函数题.并掌握到类似题型的解答方法与思路.

其次，有助于学生更好的理解函数特性.高中数学的函数教学当中，每种函数都具有相应的性质，不论是对称性、单调性，还是周期性，在对任意一条性质进行考查的时候，学生在解题时，都会自乱阵脚.因此，在具体教学时，教师需引导学生充分了解与掌握函数具备的特性.通常而言，大部分数学教师都是运用图像引导学生对函数及其具备的性质进行了解与体会，这就充分展现出数形结合的数学思想，即精确图形的运用对学生有效理解以及掌握函数性质通常有着无法取代的效果，但也会产生相应的问题，如，学生在解答函数问题的过程中，面对简单问题时，学生可以画出相应的函数图像，通过函数具备的性质分析进行自主解题，但面对相对复杂的函数题时，学生常常会出现无法下手的情况[3].这个时候，教师就需引导学生学会运用导数，促进导数作用的充分发挥，即通过导数对函数具备的单调性、周期性等相关

性质进行判断,从不同角度对函数问题进行解答.高中时期的复杂函数通过求导之后,其函数就会转变为简单函数,此时,学生就能画出简单函数的图像,并依据函数与导数存在的内在关联,对其单调性、极值、单调区间等相关问题进行求解,从而使函数问题实现准确、高效解答.

2 高中数学以导数求解函数问题的策略

2.1 以导数求解函数解析式

高中数学内容中,导数是其极其重要的部分,出题形式也十分全面,通过导数求解函数解析式也是高考中考查的重点,题目中通常会告诉给学生与函数有关的对称性、极大值、极小值、斜率等相关内容,让学生以此求取出函数解析式[4].

例 1 有三次函数 $y=f(x)$ 的图像与原点对称,若 $x=0.5$ 的时候,$f(x)$ 极小值是-1,求取函数 $f(x)$ 的解析式.

解析:设三次函数的解析式为 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$,由于函数的图像是与原点呈对称的,也就是 $f(-x)=-f(x)$,依据与此,可得:$ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-bx^2+cx-d$,因此,$b=0$,$d=0$,也就有 $f(x)=ax^3+cx$,对其求导可得:$f'(x)=ax^2+c$,根据题意,得出:$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}a+c=0$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}a+\frac{1}{2}c=-1$,联合解答,可得:$a=4$,$c=-3$.由此可知,求解的函数解析式是 $f(x)=4x^3-3x$.

本题主要是通过导数具备的几何意义及其和导数之间存在的关系进行求解,只需列出题目给定的条件加以列式就能得出答案.

2.2 以导数求解函数单调性

通过导数对函数具备的单调性进行求解时,常常会以以下 4 个步骤开展:第一步,明确函数 $f(x)$ 的具体定义域;第二步,对函数 $f(x)$ 进行求导,即 $f'(x)$;第三步,立足于函数 $f(x)$ 的具体定义域,求取符合 $f'(x)$ 与 $f'(x)<0$ 的数值;第四步,明确 $f(x)$ 的单调区间,求取出其单调性.

例 2 求取 $f(x)=x^2+\frac{3}{x}$ 的单调区间.

解析:在求解时,需对解析式的定义域实施确定,并通过导数对其单调区间进行讨论.依据题意可知,函数 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,对函数 $f(x)=x^2+\frac{3}{x}$ 进行求导可得:$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{3(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^2}$,依据 $f'(x)>0$ 的时候,可求得:$x<-1$ 或是 $x>1$;$f'(x)<0$ 的时候,可求得:$-1<x<0$ 或是 $0<x<1$.由此可知,函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$;$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$.

经过此题求解过程可知,通过导数进行函数单调性的求解实施判断是十分简单的,只要将函数 $f(x)$ 所对应的导数 $f'(x)$ 求解出来即可,并依据 $f'(x)>0$、$f'(x)<0$,求取得到的 x 值就可以了.这种情况下,高中生在对此题进行解答时,可以使学生获取更加清晰的解题思路,并实现准确、高效的解题.

2.3 以导数求解函数极值

高中数学的解题中,通常还会遇到求取函数位于某区间范围中的极值问题,依据导数具备的性质可知,若函数两边的符号不一致,就能得到函数位于具体范围内的最小值或者最大值[5].若函数式中有字母系数,则需对其实施分类讨论,以明确每个区间内的单调性.

例 3 求取函数 $f(x)=\ln x-a^2x^2+ax(a\in\mathbf{R})$ 的极值.

解析:函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{1}{x}+a-2a^2x=-\frac{2a^2x^2-ax-1}{x}=-\frac{(2ax+1)(ax-1)}{x}$.

(1) 当 $a=0$ 的时候,$f(x)=\ln x$,也就是 $f(x)$ 位于 $(0,+\infty)$ 上显示为单调递增,而没有极值;

(2) 当 $a>0$ 的时候,则有 $f'(x)=0$,此时可得:$x_1=-\frac{1}{2a}$,$x_2=\frac{1}{a}$,再加上 $x_1<0<x_2$,如果 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$,则有 $f'(x)>0$,$f(x)$ 为单调递增;如果 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$,则有 $f'(x)<0$,$f(x)$ 为单调递减;当 $x=\frac{1}{a}$ 的时候,$f(x)$ 有极小值,即 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\left(\frac{1}{a}\right)$.

(3) 当 $a<0$ 的时候,则有 $f'(x)=0$,此时可得:$x_1=-\frac{1}{2a}$,$x_2=\frac{1}{a}$,再加上 $x_1<0<x_2$,如果 $x\in\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$,则有 $f'(x)>0$,$f(x)$ 为单调递增;如果 $x\in\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$,则有 $f'(x)<0$,$f(x)$ 为单调递减;当 $x=-\frac{1}{2a}$ 的时候,$f(x)$ 有极大值,即 $f\left(-\frac{1}{2a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)-\frac{3}{4}$.

本题解答中,如果函数 $f(x)$ 位于 x_0 的两侧单调性是相反的,那么,x_0 就是极值点,需注意的是,极值点并非指"点",更多是 $f'(x)=0$ 解得的根.如果 x_0 就是极值点,那么 $f'(x)=0$,但是,$f'(x_0)=0$,x_0 并不一定是极值点,这就需确保 $f(x)$ 位于 x_0 的两侧单调性是相反的.

2.4 以导数求解函数值域

通常而言,函数 $f(x)$ 位于闭区间 $[a,b]$ 之间是可导的,此时,$f(x)$ 位于闭区间 $[a,b]$ 中最值的求解步骤为:第一步,将函数 $f(x)$ 位于闭区间 $[a,b]$ 中的极值进行求取;第二步,计算函数 $f(x)$ 位于断电与极值点所对应着的函数值;第三步,对 $f(x)$ 位于端点与极值点时的函数值大小实施对比,以此求解得到值域内的最大值与最小值.

例 4 求取函数 $f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}$ 的值域.

解析:本题解答中,首先需确定本函数的定义域,以此精准地求解出函数 $f(x)$ 所对应的导数 $f'(x)$,然后判断出导数 $f'(x)$ 的正负,进而求解得出函数 $f(x)$ 的具体值域.

由题意可知,函数 $f(x)$ 的具体定义域为 $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

由于 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}=\frac{2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{x+2}\sqrt{2x+1}}$,

又因为 $2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}=\frac{2x+7}{2\sqrt{x+2}\sqrt{2x+1}}$,

鉴于此,若 $x>-\frac{1}{2}$,$f'(x)>0$,所以,函数 $f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}$ 位于 $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上呈增函数;又由于 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以,函数 $f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$.

2.5 以导数求解函数最值

通过导数对函数的最值进行求解,通常可以使复杂的问题得到有效简化.一般来说,函数的最值求解常常用于实际应用类问题,以实现实际问题的求解.

例 5 某企业生产的某个产品成本是 C,和产量 $a(0<a<100)$ 存有的函数关系为:$C=100+4$,价格则通过 b 表示,a 和 b 存有相应的函数关系,即 $b=25-\frac{1}{8a}$,其生产利润可通过 L 表示,请问:产量 b 是多少的时候,企业的利润 L 能够最大化?

解析:本题的解答过程,可先设企业总收入为 R,那么,其利润 $L=R-C$,$R=a\times b$,此时,就能更好的得到 L 和 a 存有的函数关系,并通过求导的方式解答出函数最大值.

企业的收入为:$R=a\times b=a\left(25-\frac{1}{8a}\right)=25a-\frac{1}{8a^2}$

企业的利润为:$L=R-C=\left(25a-\frac{1}{8a^2}\right)-(100+4a)=-\frac{1}{8a^2}+21a-100\ (0<a<100)$,$L'=-\frac{1}{8a}+21$,当 $L'=0$ 的时候,$a=84$.

由此可以得出:$0<a<84$ 的时候,$L'>0$;当 $84<a<100$ 的时候,$L'<0$,据此可知,产量 $a=84$ 的时候,企业利润能够实现最大化.

本题在明确了 $y=f(x)$ 所给出的区间单调性的状况下,明确函数极值,最后,把极值和区间端点中的函数值进行对比,以此求取出最值,因此,学生在求解类似函数题的时候,可依据题意进行目标函数的构造,最终求取出最值.

3 结束语

综上所述,高中数学的解题教学当中,导数在教学内容中通常占据了重要地位,若高中生能够充分且扎实地掌握相关导数知识,这对其后期的学习及其高效解题有着显著的促进作用.鉴于此,在函数解题的教学中,教师可通过导数具备的特征、方法及相关技巧,求解相关函数问题,并促进学生的解题思路明确且清晰,从而使学生在进行函数问题解答时,能够巧妙地运用导数方法实现高效解题.

参考文献:

[1] 雷洁.问题驱动探究视角下高中数学自主建构策略——以"应用导数解决函数单调性"教学为例[J].数学教学通讯,2021(6):27－28.

[2] 岑盛锋.数学变式教学法研究——以导数求解函数零点问题为例[J].中学数学教学参考,2018(10X):31－32.

[3] 罗林.提升数学运算素养的途径探究——以函数与导数综合题为例[J].高中数理化,2021(14):4－5.

[4] 刘龙召.浅谈导数在高中数学函数中的解题应用[J].读与写:上旬,2019(4):243.

[5] 赵开余.探寻多样题型,提高解题效率——高中数学导数试题分析与教学策略[J].中学数学:高中版,2020(6):28－29.

[6] 李瑞萍.新课改背景下高中数学函数与导数考查方式研究[J].试题与研究,2020(10):28.