函数与方程思想在解三角形中的应用

田鹏，伍平勇，兰祥平

（重庆市长寿中学，重庆 401220）

通常情况下，给定足够条件，根据正余弦定理及三角形相应的性质可以彻底解三角形.若所给条件有限，则可构建函数或者方程，进而求解三角形某些边和角的取值（或范围）.文章以两道例题，介绍函数与方程思想在求解三角形中的应用.

处理与三角形有关的问题时经常会遇到设参变量的问题，尤其是三角形中存在动点时，设参变量体现得更加明显.由于动点的位置变化，常会引起其他几何量的变化.因此，自然而然地将相关几何量设成变量，进而将待求问题转化为代数问题.

1 方程思想的应用

例1 在四边形 $ABCM$ 中，$B=\frac{\pi}{2}$，$MB\perp MC$，$\angle AMB=\frac{2\pi}{3}$，若 $AB=2\sqrt{3}$，$BC=2$，则 $\triangle AMB$ 的面积为________.

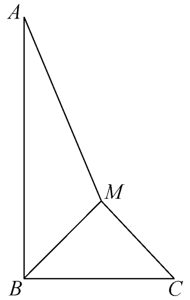

图1

分析 如图1，设 $BM=x(0<x<2)$，由勾股定理可求得 MC，然后在 $\triangle AMB$ 和 $\triangle AMC$ 分别使用余弦定理，构建方程求得 x 的值.

解法1(设线法) 因为 $B=\frac{\pi}{2}$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=2$，连接 AC，容易求得 $AC=4$.

设 $BM=x(0<x<2)$，因为 $MB\perp MC$，则由勾股定理得 $MC=\sqrt{4-x^2}$.

又因为 $\angle AMB=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\angle AMC=\frac{5\pi}{6}$.

在 $\triangle AMB$ 中，由余弦定理得

$AB^2=AM^2+BM^2-2AM\cdot BM\cos\angle AMB$，

即 $12=AM^2+x^2+x\cdot AM$，①

在 $\triangle AMC$ 中，由余弦定理得

$AC^2=AM^2+MC^2-2AM\cdot MC\cos\angle AMC$，

即 $16=AM^2+4-x^2+\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}\cdot AM$. ②

联立①②得 $AM=\frac{2x^2}{\sqrt{12-3x^2}-x}$，③

将③代入①，并化简整理得

$12-3x^2-2x\sqrt{12-3x^2}=0$，

即 $2x=\sqrt{12-3x^2}$，解得 $x=\frac{2\sqrt{21}}{7}$，

代入③式求得 $AM=\frac{4\sqrt{21}}{7}$.

由三角形面积公式得

$S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot BM\sin\angle AMB$，

即 $S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{21}}{7}\times\frac{2\sqrt{21}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{7}$，故 $\triangle AMB$ 的面积为 $\frac{6\sqrt{3}}{7}$.

评注 设 $BM=x$，再将其他线段的长度用 x 表达，最后建立 x 的方程，求解 x 的值，再代入面积公式求得答案，这就是方程思想的应用.

分析 此图形中,角的关系较多,可将某个角设为参变量.设$\angle ABM=\theta$,则$\angle BCM=\theta$,再将线段AM和BM的长度用θ表示,最后在$\triangle ABM$中用余弦定理建立θ的方程.

解法2(设角法) 设$\angle ABM=\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$,因为$B=\frac{\pi}{2}$,$MB\perp MC$,故可得$\angle BCM=\theta$,

在$\triangle BMC$中可得$BM=2\sin\theta$,

在$\triangle ABM$中,由正弦定理得

$$\frac{AM}{\sin\angle ABM}=\frac{AB}{\sin\angle AMB},$$

即$\frac{AM}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=4$,

所以$AM=4\sin\theta$.

在$\triangle ABM$中,由余弦定理得

$AB^2=AM^2+BM^2-2AM\cdot BM\cos\angle AMB$,

即$12=16\sin^2\theta+4\sin^2\theta+8\sin^2\theta$,

即$\sin^2\theta=\frac{3}{7}$.

由三角形面积公式得

$$S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot BM\sin\angle AMB,$$

即$S_{\triangle AMB}=2\sqrt{3}\sin^2\theta=\frac{6\sqrt{3}}{7}$,

故$\triangle AMB$的面积为$\frac{6\sqrt{3}}{7}$.

评注 设$\angle ABM$为θ,则$\triangle AMB$的面积可以由θ表示,这样仅仅需要构建θ的方程即可.通过对比发现,设角的方法比设边的方法更加简洁,虽然设参变量的视角不同,但本质是一样的.

2 函数思想的应用

例2 在$\triangle ABC$中,若$AB=4$,$AC=5$,$\triangle BCD$为等边三角形(A,D两点在BC两侧),则四边形$ABDC$的面积最大值为________.

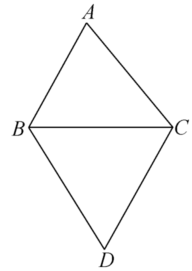

图2

分析 如图2,$\triangle ABC$和$\triangle BCD$都是不完全确定的三角形,它们有一条公共边BC,其影响两个三角形的面积.因此,设$BC=x$,再构建四边形$ABDC$的面积表达式.

解法1(设线法) 设$BC=x(1<x<9)$,在$\triangle ABC$中由余弦定理得

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC},$$

即$\cos A=\frac{41-x^2}{40}$,则

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{41-x^2}{40}\right)^2}=\frac{\sqrt{-x^4+82x^2-81}}{40}.$$

则四边形$ABDC$的面积

$S_{ABDC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BDC}$,

而$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$,

即$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}\sqrt{-x^4+82x^2-81}$,

因为$\triangle BCD$是等边三角形,

所以$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}BC\cdot BD\sin\frac{\pi}{3}$,

即$S_{\triangle BDC}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$,从而

$$S_{ABDC}=\frac{1}{4}(\sqrt{-x^4+82x^2-81}+\sqrt{3}x^2).$$

令$t=x^2$,则$1<t<81$,

则$S_{ABDC}=\frac{1}{4}(\sqrt{-t^2+82t-81}+\sqrt{3}t)$,

即$S_{ABDC}=\frac{1}{4}(\sqrt{-(t-41)^2+1600}+\sqrt{3}t)$,

再令 $t-41=40\sin\theta(\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$，

则 $S_{ABDC}=\frac{1}{4}(40|\cos\theta|+40\sqrt{3}\sin\theta+41\sqrt{3})$，

即 $S_{ABDC}=10|\cos\theta|+10\sqrt{3}\sin\theta+\frac{41\sqrt{3}}{4}$.

因为当 $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$时，$\cos\theta\in[0,1]$，

所以 $S_{ABDC}=10\cos\theta+10\sqrt{3}\sin\theta+\frac{41\sqrt{3}}{4}$，

即 $S_{ABDC}=20\sin(\theta+\frac{\pi}{6})+\frac{41\sqrt{3}}{4}$，

因为 $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，

故 $(\theta+\frac{\pi}{6})\in[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$，

则 $\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$，

从而当 $\theta=\frac{\pi}{3}$时，$(S_{ABDC})_{\max}=20+\frac{41\sqrt{3}}{4}$.

所以，四边形 $ABDC$ 的面积最大值为 $20+\frac{41\sqrt{3}}{4}$.

评注 将 $BC=x$，再将△ABC 和△BCD 的面积都用 x 表示，最后构建四边形 $ABDC$ 的面积表达式，再根据函数知识求得最值，这就是函数思想的应用.

分析 由于△ABC 的两邻边已确定，将角 A 设为 θ，然后构建四边形 $ABDC$ 的面积表达式.

解法2(设角法) 设$\angle A=\theta$，在△ABC 中由余弦定理得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$，

即 $BC^2=41-40\cos\theta$，

而四边形 $ABDC$ 的面积

$S_{ABDC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BDC}$，

而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$，

即 $S_{\triangle ABC}=10\sin\theta$，

因为△BCD 是等边三角形，

所以 $S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}BC^2\sin\frac{\pi}{3}$，

即 $S_{\triangle BDC}=\frac{\sqrt{3}}{4}(41-40\cos\theta)$，

从而 $S_{ABDC}=10\sin\theta-10\sqrt{3}\cos\theta+\frac{41\sqrt{3}}{4}$，

即 $S_{ABDC}=20\sin(\theta-\frac{\pi}{3})+\frac{41\sqrt{3}}{4}$，

当 $\theta=\frac{5\pi}{6}$时，S_{ABDC}取得最大值，最大值为 $20+\frac{41\sqrt{3}}{4}$.

所以，四边形 $ABDC$ 的面积最大值为 $20+\frac{41\sqrt{3}}{4}$.

评注 将角 A 设为 θ，将其他要用到的几何量用 θ 表示，然后构建四边形 $ABDC$ 的表达式，最后根据三角函数知识求得答案.

3 结语

与几何图形有关的问题，很多都与线段和角度(当然还有其他几何量)有关系.特别是与动点有关的问题，设参变量是必然的选择.文章中，两道例题分别从两个不同的视角来构建方程(函数)，本质是一样的，只是其运算量不一样.总的来讲，对几何图形中的几何关系挖掘得越深刻，得到的代数表达越简洁，计算量也越小.要做到这一点，只有不断积累解题经验，多归纳总结，方能灵活设参变量，简化运算.

对于一个几何问题，究竟将什么几何量设为参变量，没有固定的套路可言.但是可以明确的是，在数学思想的引领下，通常可以找到一个有效而快捷的解决方案.

(责审 李红)