○高考之窗○

函数对称性的高考命题动向

陈应全 刘国亮

(广东省高州市教师发展中心,525299) (广东省高州中学,525299)

对称性是函数的重要性质之一,在函数中融合对称性进行命题一直深受高考命题专家的青睐. 笔者以往年高考真题为例,探析对称性在函数中的命题动向,供读者参考.

一、函数对称性命题动向探析

1. 考查一个函数的对称性

一个函数的对称性,包括函数自身成中心对称、轴对称与双对称. 这三种对称都是近年高考的热点问题之一,而且常常结合函数的其他性质进行考查,考题结构灵活、隐蔽性强,是考查学生关键能力与核心素养、渗透数学思想方法的好素材.

(1) 函数自身成中心对称

例1 (2018 年全国高考题) 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1$, $f(a)=4$,则 $f(-a)=$ ______.

解 令 $g(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$,则有 $f(x)=g(x)+1$,且易知 $g(x)$ 为奇函数,所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称,有 $f(a)+f(-a)=2$. 又 $f(a)=4$,故 $f(-a)=-2$.

评注 一般地,若 $f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 对称,则 $f(x)+f(2a-x)=2b$;反之亦成立.

(2) 函数自身成轴对称

例2 (2017 年全国高考题) 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$ 有唯一零点,则 $a=$ ( )

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

解 令 $g(x)=x^2-2x$, $h(x)=a(e^{x-1}+e^{-x+1})$,则 $f(x)=g(x)+h(x)$. 由 $g(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称,而 $h(x+1)=a(e^x+e^{-x})$ 为偶函数,知 $h(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称,故 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称. 又 $f(x)$ 有唯一零点,故 $f(1)=0$,解得 $a=\frac{1}{2}$. 选 C.

评注 本题是命题专家打破了常规对称性和零点考查的方式,要求考生先要运用所学知识将 $f(x)$ 表示成两个函数的和之后再研究其对称性,并利用对称函数叠加后保持对称性找到突破口,考查了学生的创新思维能力. 这种命题方式符合新高考的改革方向,能有效防止“机械刷题,反复刷题”低效的应试手段.

一般地,若函数 $h(x)$ 和 $g(x)$ $(x\in D)$ 的图象皆关于直线 $x=a$ 对称,则 $f(x)=h(x)+g(x)$ 的图象在 D 上也关于直线 $x=a$ 对称;若函数 $h(x)$ 与 $g(x)$ 的图象分别关于点 (a,b), (a,c) 中心对称,则 $f(x)=h(x)+g(x)$ 的图象关于点 $(a,b+c)$ 中心对称.

(3) 函数自身成双对称

例3 (2021 年全国高考题) 设 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数,且 $f(1+x)=f(-x)$. 若 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$,则 $f\left(\frac{5}{3}\right)=$ ( )

(A) $-\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$

解 依题意, $f(x)$ 的图象关于原点对称,且 $f(-x)=-f(x)$. 又 $f(1+x)=f(-x)$,故 $f(x+1)=-f(x)$,进而 $f(x+2)=f(x)$,即 $f(x)$ 以 2 为周期. 所以 $f\left(\frac{5}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$,选 C.

评注 本题以抽象函数为载体考查了函数的中心对称与轴对称,通过双对称挖掘

$f(x)$ 隐含的周期性,使问题能快捷求解.

一般地,若 $f(x)$ 的图象同时关于点 $A(a,c)$ 和 $B(b,c)(a \neq b)$ 成中心对称,则 $f(x)$ 以 $2|a-b|$ 为周期;若 $f(x)$ 的图象同时关于直线 $x=a$ 和 $x=b(a \neq b)$ 成轴对称,则 $f(x)$ 以 $2|a-b|$ 为周期;若 $f(x)$ 的图象既关于点 $A(a,c)$ 成中心对称又关于直线 $x=b(a \neq b)$ 成轴对称,则 $f(x)$ 以 $4|a-b|$ 为周期.

2. 考查两个函数的对称性

两个函数的对称性主要有三种命题方式,包括两个函数具有相同对称性、两个函数成轴对称与两个函数成中心对称. 不少学生对两个函数的对称性与一个函数的对称性易产生混淆,造成思维混乱,从而无法找到正确解题突破口,高考命题专家往往会抓住学生的该"痛点"命制试题,达到高考的选拔功能.

(1) 两个函数具有相同对称性

例 4 (2016 年全国高考题) 若函数 $f(x) = (x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(x)=f(2-x)$,且函数 $y=|x^2-2x-3|$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$,则 $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i=$ ( )

(A) 0 (B) m (C) $2m$ (D) $4m$

解 依题意得 $y=f(x)$,$y=|x^2-2x-3|$ 的图象都关于直线 $x=1$ 对称,故它们图象的交点也关于直线 $x=1$ 对称. 当 m 为偶数时,其和为 $2 \times \frac{m}{2}=m$;当 m 为奇数时,其和为 $2 \times \frac{m-1}{2}+1=m$. 故选 B.

例 5 (2016 年全国高考题) 已知函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$,若函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$,则 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$ ( )

(A) 0 (B) m (C) $2m$ (D) $4m$

解 由题意可知 $f(x)$ 及 $y=\frac{x+1}{x}$ 的图象都关于点 $(0,1)$ 对称,所以它们图象的交点也关于点 $(0,1)$ 对称. 对于每一组对称点 (x_i,y_i) 和 (x_i',y_i'),都有 $x_i+x_i'=0$,$y_i+y_i'=2$. 从而 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=\frac{m}{2}\times 2=m$. 故选 B.

评注 例 5 与例 6 主要考查了利用两个函数具有相同对称性进行解题,其创新点是从两个不同函数的对称性作了考查,而不是直接从奇偶性的角度,从而提高了试题难度. 一般地,两个函数具有同样的对称性,则它们图象的交点与也具有相同的对称性.

(2) 两个函数成轴对称

例 6 (2015 年全国高考题) 设函数 $y=f(x)$ 与 $y=2^{x+a}$ 的图象关于直线 $y=-x$ 对称,且 $f(-2)+f(-4)=1$,则 $a=$ ( )

(A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 4

解 设 $P(x,y)$ 是 $y=f(x)$ 的图象上任意一点,则它关于 $y=-x$ 的对称点 $P'(-y,-x)$ 在 $y=2^{x+a}$ 的图象上,即有 $-x=2^{-y+a}$,解得 $y=\log_2(-x)+a$,即 $f(x)=-\log_2(-x)+a$. 所以 $f(-2)+f(-4)=-\log_2 2+a-\log_2 4+a=1$,解得 $a=2$. 故选 C.

评注 本解法的关键是由对称性求 $f(x)$ 的表达式,再利用 $f(-2)+f(-4)=1$ 建立关于 a 的方程,从而求得 a 的值. 一般地,函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称;$y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 的图象关于 x 轴对称;$y=f(a+x)$ 与 $y=f(b-x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称. 若求函数关于某直线对称的函数,则可利用求曲线轨迹方程的方法——相关点法求解.

(3) 两个函数成中心对称

例 7 (2012 年湖北高考题) 已知定义在区间 $[0,2]$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图象如图 1 所示,则 $y=-f(2-x)$ 的图象为( )

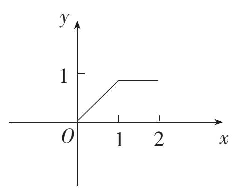
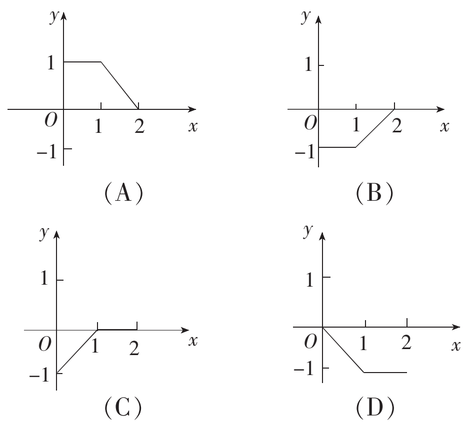


图 1



解　由于$y=f(x)$与$y=-f(-x)$的图象关于点$(0,0)$对称，而$y=-f(2-x)$的图象可由$y=-f(-x)$的图象向右平移2个单位得到，故选B.

评注　本题关键是利用$y=f(x)$与$y=-f(-x)$关于原点对称，再结合图象平移知识快速求解.

二、命题特点分析

纵观近几年以上高考真题动向探析，对称性在函数中的应用的命题特点有如下几点:

1. 从命题题型角度

从历年真题可以看出，它主要出现在选择题与填空题. 这与它在高考中的地位有着直接关系，高考命题专家顾及到函数板块中的导数内容与高等数学关联较大，以导数知识为载体命制试题能较好地甄别出考生进入大学深造的潜质，所以几乎每年高考都将导数作为解答题压轴题. 对称性作为函数一个重要性质，它在函数中的应用只能放在选择题或者填空题考查，但考查的角度多样化，上述的高考动向探析中六个方向在往年高考中都作了考查. 因此在高考备考中，训练题型应以填空题、选择题为主，同时熟记与对称性的有关二级结论，则可以大大提升解题速度与准确率.

2. 从命题难度角度

从高考真题不难看出，此类问题难度以中等或中等偏上为主，常常在选择题第11、12题以及填空题第16题出现，虽然试题难度不是很大，但创新性强，对很多考生而言是一个不小的挑战. 因此在高考备考中，应加强从数和形上对函数对称性的理解，善于总结中心对称以及轴对称函数的相关性质以及了解对称函数的构造原理，充分领会蕴含在对称性有关的二级结论中的思想方法，不能只背熟相关结论而忽略结论的来龙去脉进行过度刷题，真正的复习效率应落在常规教学课堂的每一节课中.

3. 从命题核心素养考查角度

纵观以上例题可以发现数学运算素养在每一道试题里面都得到了很好的渗透考查，逻辑推理与直观想象素养考查的力度也很大. 如2017年全国新课标Ⅲ卷理第11题、2015年全国新课标Ⅰ文第12题. 这与中国高考评价体系提出高考命题理念从“知识立意”“能力立意”向“价值引领、素养导向、能力为重、知识为基”转变是相吻合的. 这也说明高考对数学核心素养的考查从未停止过脚步. 因此，我们在高三复习备考中务必着眼于提升核心素养，可以说，高考试题万变不离其宗，只是题目情境在变更，数学考查的核心问题从未改变.

(上接第53页)

本题中$a=2,b=1$，点C的横坐标为$1=\frac{1}{2}a$，$\theta_C=60°$，所以$\frac{1}{2}(\theta_A+\theta_E)=\theta_C=60°$，可得$k_{AE}=-\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}(\theta_A+\theta_E)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$.(正好是点$C$处切线的斜率)