○高考复习研究○

基于题根变式教学的高三一轮复习教学设计

——以“平面向量数量积及其应用”为例

李小峰

(江苏省昆山市震川高级中学,215300)

题根变式教学是指在复习课中,以题根题为例题,引申出若干变式题,从而形成“变式网络”,为学生提高解题能力进行必要的指导和铺垫,帮助学生进行练习巩固、反思巩固、欣赏体察、变式应用,以至提炼成数学思想方法,这是非常有效的一种复习模式. 下面以高三一轮复习中的“平面向量的数量积及其应用”一课为例,展示基于题根式变式教学的高三一轮复习教学设计.

一、教学内容分析

本节课是高三一轮复习的一节内容,之前复习了平面向量的基本原理与坐标运算. 向量数量积的定义非常简单,但涉及的知识很多: 有概念类如向量的夹角、向量的模、一个向量在另一个向量上的投影; 有运算律类如平面向量数量积的运算律、向量的平方等于向量模的平方等等. 同时,数量积的应用非常广泛,如证明平行四边形中对角线的平方和等于四边的平方和,用数量积可以将平面向量的线性表示中的向量与数量分离开来; 再如用数量积证明余弦定理,还可以用向量不等式 $|a\cdot b|\leqslant|a||b|$ 去证明二元柯西不等式. 求平面的向量的方法有定义法、基底法、坐标法、几何意义法与利用极化恒等式法等常见方法. 本节内容中蕴含的数学思想方法也非常丰富: 有“数形结合”思想、“等价转化”思想、构造法、从特殊到一般、类比推理、迁移能力,等等.

此外,平面向量中的相关知识如角的计算对理科学生在学习空间向量的相关知识时有借鉴和促进作用,为空间向量的学习打下坚实的基础.

二、教学情况分析

由于是高三一轮复习,学生们对平面向量数量积的相关定义、夹角、模长、数量积的运算律等知识已经了解和掌握,对数量积的定义法、坐标法运用较为熟练,对向量的线性表示掌握得较好,这为学生解决平面向量数量积的各种方法的归纳总结奠定了基础.

由于教材上(苏教版)将“向量 b 在向量 a 方向上的投影”编写在数量积章节的链接部分,教师对此部分内容的处理也是比较含糊,一带而过,所以学生们对数量积的几何意义了解不多.

尽管学生对向量数量积的坐标运算较为熟悉,但对构造数量积的坐标形式解决不等式问题接触较少,同时有一些学生参加过数学竞赛辅导,接触过柯西不等式,但对于柯西不等式的向量法证明知道较少,所好的是本实验班学生基础较好.

一轮复习,除了要复习一些高考范围内的解题知识、方法,同时要引导学生学会如何解题,更主要的帮助学生们在复习过程中提高各种能力,如归纳总结能力、类比推理能

力、迁移能力等. 当然这些能力的培养需要长期的渗透,在每节课上都要去培养和提高学生们相关能力.

基于上述分析,确定本课的教学难点:

让学生们理解掌握平面向量数量积的几何意义并能灵活应用于相关题目的解题过程中,此外是构造向量数量积的坐标形式解决一类多变量的最值问题和利用构造向量证明柯西不等式.

三、教学目标与策略

(1) 通过对题根 1 以及相关的变式题的掌握和归纳总结出平面向量数量积的 5 种常见求解方法,尤其是利用几何意义求数量积.

(2) 通过对题根 2 的讲解和分析,让学生熟悉向量不等式,同时了解构造向量的数量积在不等式中的相关应用.

(3) 在对题根 1 和 2 及相关变式的总结归纳中让学生感悟和体验数形结合、等价转化、构造法、类比推理、迁移能力等数学思想方法和能力.

学生课前预习给出的两个题根,上课时逐一给出相关变式,引导学生解决变式题的同时也归纳总结出相应的解题方法和得出柯西不等式的向量证法.

本节课的重点是平面向量数量积的 5 种求法以及平面向量数量积在不等式中的应用.

四、教学程序设计

题根 1 如图 1,$\triangle ABC$ 中,$AB = 2$,$AC = 4$,$\cos\angle BAC = \frac{11}{16}$,求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值.

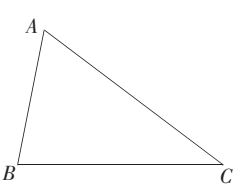

图 1

解 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC = 2\times 4\times\frac{11}{16} = \frac{11}{2}$.

设计意图 复习向量数量积的定义,唤起学生的记忆认知.

变式 1 $\triangle ABC$ 中,$AB = 2$,$AC = 4$,$BC = 3$,求 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值.

(这里,给出变式 1 的两种解法,其余变式的求解请读者自行探讨)

解法 1 由 $BC = 3$ 及余弦定理 $\cos\angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{11}{16}$,可得

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos(\pi - \angle BAC) = 2\times 4\times\left(-\frac{11}{16}\right) = -\frac{11}{2}$.

解法 2 由 $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$,两边平方,得 $\overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BC}^2$,所以

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{AC}^2}{2} = -\frac{11}{2}.$$

设计意图 通过变式 1 让学生复习向量的夹角和向量数量积的运算律,利用变式 1 可以证明余弦定理,利用变式 1 还可以巩固向量的平方等于模的平方,渗透等价转换的数学思想.

变式 2 $\triangle ABC$ 中. $AB = 2$,$AC = 4$,$BC = 3$,求 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的值.

设计意图 巩固变式 1 的成果并培养学生的迁移能力.

变式 3 如图 2,$\triangle ABC$ 中. $AB = 2$,$AC = 4$,若点 P 为线段 BC 的中点,求 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值.

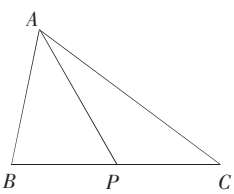

图 2

设计意图 由于学生们对向量的线性表示掌握较好,所以通过本题让学生自主归纳出用基底法求数量积,即将所求向量的数量积转化为已知长度与夹角的向量去求解,让

学生体会化归的数学思想.

变式4 如图3,△ABC中. 若$AB=2$,$AC=4$. 点P为△ABC的外心,求$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}$的值.

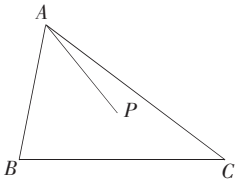

图3

设计意图 通过变式4让学生对向量数量积的几何意义的理解.

问题1 结合变式3和变式4,能否提炼出更一般的问题呢?

答 当点P在BC的垂直平分线上时,求$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}$的值.

问题2 你能否对这个问题做出解释呢?

答 如图4,$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{BC}$方向的投影$|\overrightarrow{DP_0}|$与$\overrightarrow{AP_0}$在$\overrightarrow{BC}$方向的投影$|\overrightarrow{DP_0}|$相等,所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AP_0}\cdot\overrightarrow{BC}$为定值.

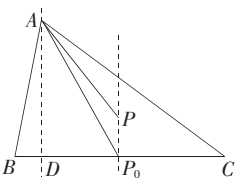

图4

设计意图 进一步巩固数量积的几何意义解释,引导学生从特殊到一般的观察,培养学生的探究意识和能力.

变式5 △ABC中,点P为线段BC的中点,且$AP=5$,$BC=6$,求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的值.

设计意图 本变式引导学生再思考,将两式相加有什么发现?得到平行四边形四边的平方和等于对角线的平方和;利用本变式可以复习用坐标法求数量积;还可以引导学生归纳出向量的极化恒等式,即

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}{4}.$$

问题3 求平面向量数量积的常见方法有哪些?

定义法、几何意义法、基底法、坐标法与利用极化恒等式.

题根2 直线$l:y=kx+1$与圆$O:x^2+y^2=1$交于$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$两点,若$x_1x_2+y_1y_2=-\frac{1}{2}$,则$k=$_____.

解 由$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{|OA||OB|}=-\frac{1}{2}$,得$\angle AOB=120°$.

所以,O到AB的距离为$\frac{1}{2}$,即$\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{2}$,所以$k=\pm\sqrt{3}$.

设计意图 复习数量积的坐标形式,以及利用数量积求角,为下面的变式1和变式2埋下伏笔.

变式1 平面直角坐标系xOy中,点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,则三角形OAB的面积为_____.

几何解释: 如图5,将点A逆时针旋转90°到点$A'(-y_1,x_1)$,则

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB}|=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|.$$

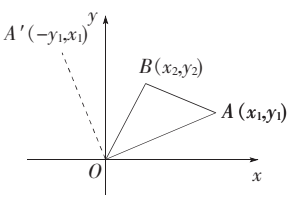

图5

设计说明 常规解法的计算量较大,但也可以让学生们掌握多个未知数运算时的整体代换以减少运算量;几何解释是数量的另一层几何意义,大大减少了运算量,同时这个结论(三角形的面积公式)在以后解析几何中的用处很大.

变式2 设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$是圆$O:x^2+y^2=1$上两点，则$x_1x_2+y_1y_2$的最大值为_____.

设计意图 进一步巩固体会构造向量的数量积在解函数最大值问题中的作用，同时也为柯西不等式的推导奠定基础.

变式3 已知$x^2+y^2=1$，则$2x+3y$的取值范围为_____.

设计意图 本题的解法很多，在这里重点让学生体会构造向量数量积的方法，为变式4埋下伏笔.

变式4 已知正数x,y,z满足$2x+3y+4z=1$，则$x^2+y^2+z^2$的最小值为_____.

设计意图 让学生体会三元变量可构造空间向量进行最值的计算和处理.

问题1 结合变式2,3，能否归纳出一个跟$x_1y_1+x_2y_2$相关的不等式呢?

$(x_1y_1+x_2y_2)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$.

问题2 结合变式4，能否得出一个跟$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$相关的不等式呢?$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$.

问题3 能否得出一个更一般的不等式呢?$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)$，

当且仅当$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}$时取等号(其中$x_i\cdot y_i\neq0$).

设计意图 问题中变量逐步增多，从二维向量过渡到三维向量，进一步过渡到构造n维向量证明柯西不等式，培养学生的归纳意识与能力.

五、课堂小结与反思

(1) 数量积的5种常见方法：定义法、几何意义法、基底法、坐标法与利用极化恒等式.

(2) 平行四边形对角线的平方和等于四边的平方和.

(3) 向量不等式$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

(4) 点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则三角形OAB的面积

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|.$$

(5)$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)$.

设计意图 概括是思维的基础，是思维最基本的特点之一，课堂小结与反思是对课堂教学的概括，有利于学生们按照自己习惯的编码方式进行相关知识的记忆，有利于学生进行深层次的思维构建.

(上接第24页)

式来解决，只有在保证基本不等式的两边有一边是定值时才有可能利用它来求最值.

师：如果基本不等式的一边是定值，一定能利用它求最值吗?

问题3 求函数$y=x+\frac{1}{4x},x\in[\frac{1}{2},2]$的最小值.

生7：看到函数形式，选择使用基本不等式求解，结果得1. 但是等号成立时$x=\frac{1}{2}\notin[\frac{1}{2},2]$，因此最小值不是1.

师：根据上述讨论，你能归纳出何时能利用基本不等式求最值?如何求最值?

反思 上例中首先以实际问题入手，列出了一个形如二次函数形式的问题，学生容易利用配方法求出最值. 当他们沉浸在成功的喜悦时，将问题改为一个基本不等式模型，让学生在认知冲突中产生新的认识，再通过问题的变化以提醒学生利用基本不等式求最值时需要注意的问题，使学生的学习情感跌宕起伏并留下深刻印象，最后归纳形成基本不等式应用的条件“一正、二定、三相等”.