

基于“两种理解”的独立性检验教学研究

张 婷 徐章韬

(华中师范大学数学与统计学学院, 430079)

摘 要:英国数学教育家斯根普提出“数学理解”的两种模式——“工具性理解”和“关系性理解”, 这“两种理解”对中学数学教学具有重要的指导意义. 独立性检验是一类特殊的假设检验, 高中独立性检验教学的难点在于没有假设检验的知识背景之下介绍独立性检验的基本思想. 本文基于“两种理解”, 对独立性检验中的知识点进行不同教学程度的分类, 并给出高中独立性检验教学的可执行性步骤.

关键词:工具性理解; 关系性理解; 独立性检验; 数学理解; 教学研究

理解是学生学习数学知识、提升数学素养的关键, 也是教师开展数学教学的根本目的. 章建跃认为数学教师必须在理解数学、理解学生、理解教学上狠下功夫^[1]. 著名的英国数学教育家斯根普致力于理解学习, 他提出“数学理解”的两种模式: “工具性理解”和“关系性理解”^[2]. 在庞大的中学数学知识体系中, 不乏应作“工具性理解”的知识. “关系性理解”要求学生“知其然, 更知其所以然”, 这也是数学教育所追求的抓住数学本质促进理解.

随着大数据时代的来临, 概率与统计显得愈发重要. 根据调查^[3], 80% 以上的教师对大部分概率统计基本概念的认识都处于模糊状态, 理解深度不够, 缺乏用这些概念答疑解惑的能力, 影响概率统计知识的教学效果. 教师直接向学生传递概率统计知识, 如果不能对一些核心概念理解到位, 势必影响学生对知识的理解以及数据分析观念和统计思维的形成^[4]. 独立性检验是一类特殊的假设检验, 高中独立性检验教学的难点在于没有假设检验的知识背景之下介绍独立性检验的基本思想. 本文基于斯根普提出的“两种理解”, 对独立性检验中的知识点进行不同教学程度的分类, 并给出高中独立性检验教学的可执行性步骤.

一、斯根普的两种理解模式

理解学习是斯根普致力于数学教育研究的其中一个方面, 他提出“数学理解”的两种模式: “工具性理解”和“关系性理解”. 所谓“工具性理解”, 是指一种语义性理解或者一种程序性理解. 语义性理解即符号 A 所指代的事物是什么; 程序性理解即一个规则 R 所指定的每一个步骤是什么、如何操作. 简言之, 就是“知其然, 不知其所以然”. “关系性理解”则

还需加上对符号意义和替代物本身结构上的认识, 获得概念和规律(定律、定理、公式、法则等)的途径以及规则本身有效性的逻辑依据等等. 简言之, 就是“知其然, 更知其所以然”.

数学理解一直是国际数学教育的重点研究主题. 目前西方数学理解研究已经逐渐成熟. 根据余瑶、张莉的国外文献研究^[5], 不同学者对“数学理解”的界定可归纳为四个方面: (1) 从认知角度, 有学者认为数学理解是由数学概念、数学事实等组成的一种认知网络; (2) 依据性质, 有学者将数学理解当作去理解的过程或是理解实现的结果; (3) 从教师方面, 有学者表示数学理解是教师重组数学知识, 将数学知识转变成学生特定的数学能力的过程; (4) 根据学生视角, 有学者主张数学理解是学生对数学本质的认识, 是学生学习的最终目标. 不难发现, 虽然学者们的侧重点有所不同, 但都立足于领悟知识本质促进数学理解, 这与斯根普的“关系性理解”的内涵一致.

斯根普将“知其然, 不知其所以然”作为理解的一种, 与中国研究者认为其是一种机械性记忆的观念产生冲突. 任伟芳、偶伟国、龚辉、张敏^[6]等人对“工具性理解”进行了本土化的处理. 类比钱伟长对数学这把“刀”在工程上应用的论述, “工具性理解”是指能识别知识, 了解其价值、用途并加以使用. 从“教学平台理论”角度出发, “工具性理解”是考虑到学生的现有知识水平和可接受性, 将知识作为一个平台, 明其意义, 会用即可. 在论述“刀”时, “关系性理解”被进一步细分为了解知识的生成过程的“关系性理解”和在复杂情境中应用知识并改进知识的创新性理解. 本文所讨论的“两种理解”倾向于本土

化的“工具性理解”和被进一步细分的“关系性理解”。

二、“两种理解”在独立性检验中的教学

1. 可行性分析

“工具性理解”对中小学教学有指导意义。中小学数学里,只做“工具性理解”的内容很多,大致说来有以下几类^[6]:(1)前人使用的语言;(2)约定俗成的规则;(3)无法严格处理的内容;(4)一些基本技能的训练。对于前人使用的语言,我们主要关注的是使用问题,纠其渊源意义不大。后三类的内容超出学生现有的知识水平,无法向学生说清其中缘由。借用形象的说法帮助记忆,使其成为一个平台,在后续相关知识的学习下学生逐渐体会其价值和作用。总之,“工具性理解”并不是一种机械性记忆,虽然教师出于“不得已”而不去讲清来龙去脉,但会间接地赋予其意义。将这类知识作为平台非但不会影响学生能力的提升,而且在后续不断建立联系的过程中其必要性也会逐渐显现。

高中独立性检验教学的难点在于没有假设检验的知识背景之下介绍独立性检验的基本思想。现以人教版高中数学教科书选择性必修三^[7]和苏教版高中数学教科书选择性必修二^[8]为例说明“工具性理解”在独立性检验教学中的可行性。两教材中均没有明确提出显著性水平、拒绝域、第一类错误等假设检验中的基本概念。统计量 χ^2 的分布和显著性水平 α 与临界值 x_α 之间的确切关系在两版教材中也没有解释,而是以“统计学家建议”或“统计学中有明确结论”之类的表述直接给出结论。特别地,苏教版教材避开了该式 $P(\chi^2 \geq x_\alpha) = \alpha$ 的说明,以具体数据辅之文字说明。《普通高中数学课程标准(2017年版)》对独立性检验的思想及其初步应用要求较低,只需通过实例了解 2×2 列联表独立性检验及其应用即可^[9]。从知识的“工具性理解”角度来看,统计量的概念、 χ^2 的概率分布以及显著性水平与拒绝域的确定都超越了高中学生的现有知识储备,教师贸然讲授其中缘由常常“费力不讨好”,甚至搞得学生“云里雾里”,对学生的理解并无多大用处。此时,教师适当转换思路,植根于可接受性原则,在实例中传递本质与思想,在不影响形成过程的完整性的同时让知识的应用更加灵活。这与课标对于此内容提出的要求和教材的编写也契合。

“关系性理解”的标志有以下特征^[6]:(1)揭示知识发生过程,包括情境创设、抽象概括、去粗存精、形式化表示等;(2)进行演绎逻辑分析。对数学定

理、原理、规则进行逻辑证明,与周围知识进行逻辑连接;(3)提升为数学思想方法。将数学知识的形成和论证提升为数学方法;(4)形成自身的认知结构。学习者将数学知识经过以上的认知活动之后,形成个人的数学图式网络,并能运用于变式状态下的数学情境。

现行的概率与统计教学之下,不乏学生在理论知识不理解的情况下直接套用、硬用的现象。适当的“关系性理解”有助于记忆独立性检验的主要步骤和在不同的情境下灵活运用。概率与统计属于随机性数学的范畴,从数据到结论中间会因为随机性而产生错误,并不像确定性数学是一个严密的从条件到结论的演绎系统。基于该差异,对以上“关系性理解”的标志特殊化并辅以具体说明。

(1)从总体上把握知识依据。包括假设检验的思想、本质及基本概念。假设检验对某个猜测是否可靠所进行的判断,其思想类似于数学上的反证法,但是其推出矛盾是基于一个与原假设 H_0 对立的小概率事件的发生。由于样本的随机性或者说小概率事件并非不可能发生,假设检验是会犯错误的,并且这种错误无法消除。这正是与学生一直学习的确定性数学的不同之处。为了控制犯错误的概率,我们事先给定一个较小的数 α ,这就是显著性水平。假设检验的本质是样本值与假设的不一致程度,可以用统计量衡量两者差异。

(2)从细节上理清知识合理性。包括显著性水平的功能、统计量的作用、显著性水平与拒绝域(或临界值)之间的关系。显著性水平既是 H_0 为真拒绝 H_0 错误的概率,又是与原假设 H_0 对立的小概率事件的概率。统计量 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是由随机抽样所得的样本数据 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 构造的函数,自然可以代表两者差异。那么对于双边假设检验来说,问题就归结为确定一个数 k ,当 $|g(X_1, X_2, \dots, X_n)| \geq k$ (对于单边检验,拒绝域的形式有所改变)两者差异显著,作出拒绝 H_0 的决策;反之,不能拒绝 H_0 。数 k 是作出差异是否显著的一个临界值。当显著性水平 α 给定后, $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 有一个分布,根据 $P(|g(X_1, X_2, \dots, X_n)| \geq k) = \alpha$,数 k 就确定了。

(3)知晓与数学上的反证法的区别。假设检验使用的反证法不同于数学中的反证法,它是小概率事件原理上的概率反证法。这种带有“概率性质”的反证法体现在它借助概率来衡量样本数据与假设之间的差异^[10]。最明显的区别是在全部逻辑推理正确的情况下,反证法不会犯错误,但假设检验会犯随机

性错误.

(4) 根据不同问题情境灵活使用假设检验, 不生搬硬套.

作为中学教育的数学知识, 必须考虑到学生的思维水平和知识水平应该划分理解的层次. 在不影响知识的思想本质及过程的完整性的情形下, 对于某些有难度、需要丰富的高等数学背景的知识点, 可以采用“工具性理解”, 懂其作用、会用即可. 而对于该知识的思想起着关键作用的核心概念, 立足于长远的眼光还应采用“关系性理解”. 笔者认为, 在高中独立性检验的教学中, 统计量的概念、 χ^2 的概率分布以及显著性水平与临界值之间的关系宜采用“工具性理解”, 显著性水平这一核心概念宜采用“关系性理解”.

2. 可执行性步骤

马复在文^[11]中提出了“关系性理解”的一个教学猜想: (1) 知道 —— 知道该对象的定义, 一些本质属性, 若干典型实例以及与若干其它对象之间的差异; (2) 应用 —— 能归纳、概括事物的特征与规律, 可以在与最初接触该对象的相似情境中应用该对象的某些性质, 通过模仿范例去解决一些问题, 并且知道求解过程的合理性; (3) 联结 —— 可以在该对象与自我认知结构中已有的相关数学概念之间构成本质上的联系, 扩展知识网; (4) 问题解决 —— 能够在全新的问题情境中, 把所学的对象作为一种解决问题的手段, 方法甚至思路, 用于新问题的解决, 并产生新的思想和观念. 这四个环节不仅限于“关系性理解”的范畴, “知道”、“应用”环节的要求仍属于“工具性理解”, “问题解决”环节已经达到“创新性理解”的水平. 在高中统计的知识网络中, 线性回归分析与独立性检验都是作出统计推断的方法, 但除了利用样本估计总体这个总思想, 两者关联不大. 又鉴于课程标准对独立性检验的要求较低, 此部分的教学我们不作“联结”和“问题解决”层次上的设计和要求. 独立性检验教学的可执行步骤具体如下.

(1) 情境创设, 抛出总问题. 教师呈现一段有关呼吸道疾病与吸烟的调查数据, 并向学生提问: 患呼吸道疾病与吸烟有关吗? 然后根据随机事件频率的稳定性得出推断. 此时教师须反问学生“事实果真如此吗?” 事实上, 在样本较少的情况下, 频率很难趋近于概率. 同时由于样本是随机抽取的, 不排除极端情况的出现. 通过这两点分析, 教师提出本节课提纲挈领的总问题: 能有多大的把握认为“患病与吸烟有关?” 然后提出原假设 H_0 : 患病与吸烟没有关系, 并转换为 $H_0: P(AB) = P(A)P(B)$.

(2) 体会独立性检验的本质、思想. 在原假设成立的情况下, 利用 2×2 列联表中的随机样本确定吸烟且患病等四种情况人数的估计值. 接着教师介绍独立性检验的思想: 实际观测值应该与在原假设成立的情况下得到的估计值差异不“大”, 如果两者的差异程度“足够大”时, 就有理由推翻原来提出的假设. 于是顺势提出奠基独立性检验本质的问题: 怎样描述实际观测值与估计值的差异?

(3) 了解统计量的作用. 统计量能代表观测值与估计值之间的差异, 且因其自身满足的概率分布可以帮助后续的拒绝域的确定. 由于没有该知识背景, 学生只能大概地了解到后一个作用. 教师应着重展现统计量 χ^2 构造的合理性和过程: 为了避免四种情况的差值正负相消及消除样本容量对差异大小的影响, 采用 $\sum \frac{(\text{实际频数} - \text{理论频数})^2}{\text{理论频数}}$ 的形式, 并说明统计学中用 χ^2 来刻画该差异. 解决了差异的描述问题, 接下来就是解决比较两者差异的问题, 即怎样确定 χ^2 大小的标准.

(4) 分析显著性水平的功能. 独立性检验所依据的是小概率原理, 即小概率事件在一次试验中基本不会发生. 在假设 H_0 为真的情况下, 两者差异一般不会过大, 也就是两者差异较大的概率很小. 由于两者差异较大的概率很小, 在一次随机试验中几乎不可能发生, 那如果仅一次观察就发生, 我们就有理由作出推翻原假设 H_0 的判断. 显然, 小概率事件的概率越小, 小概率事件发生后否定原假设 H_0 的判断越有说服力. 界定“小概率”的标准就是显著性水平 α ($0 < \alpha < 1$). 此为 $P(\chi^2 \geq x_\alpha) = \alpha$ 的第一层含义 —— 小概率事件. 在原假设成立下, $\chi^2 \geq x_\alpha$ 一般是不会发生的, 继而作出拒绝 H_0 的决策. 此为 $P(\chi^2 \geq x_\alpha) = \alpha$ 的第二层含义 —— 犯“弃真”错误. 从两个角度说明显著性水平的功能, 学生方能知道独立性检验的思想和优势的“然”, 解决思想层面的问题. 从应用层面上说, 教师可适当说明 x_α 是由 χ^2 分布和 α 显著性水平共同决定的, 它与 α 一一对应. 接着给出常用的 α 和临界值 x_α 的对应值表及检验法则.

(5) 呈现具体步骤及例题. 通过一个案例的完整展现, 教师与学生共同概括出独立性检验的主要环节: ① 提出假设 H_0 ; ② 根据 2×2 列联表计算 χ^2 的值, 并与给定的 α 下的临界值 x_α 比较; ③ 根据检验法则得出推断结论. 最后通过例题和练习题检验教学效果.

(下转第 63 页)

$2a^3 + 1 \geq 3a^2$, 此时通过均值不等式放缩调整次数.

解法中引入的常数 $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, 4^{-\frac{5}{4}}$, 即通过均值不等式放缩将项 b^2, c^3, d^4 的次数降为 1, 平衡系数使放缩后的项 b, c, d 的系数为 1 所得到的. 当然, 本题还可以通过待定系数法求解确定这些参数.

一题多变是题目结构的变式, 而题目所考查的实质不变, 变化的目的是从不同角度、不同方面揭示

题目的本质. 用这种方式进行教学, 试题要精心挑选, 体现出数学知识的拓展性与探究性, 促使学生根据变化的情况积极思索, 寻找解决问题的办法, 从变化中总结解题方法, 发现规律, 发现“不变”, 从而培养思维的灵活性.

(收稿日期: 2022-10-15)

(上接第 9 页)

独立性检验教学的主要环节及简要的具体要求如下表:

环节	具体要求
情境创设, 抛出总问题	① 总问题: 能有多大的把握认为“患病与吸烟有关” ② 提出原假设 H_0 : 患病与吸烟没有关系
体会独立性检验的本质、思想	③ 在原假设成立的情况下, 利用 2×2 列联表中的随机样本确定估计值 ④ 介绍独立性检验的本质、思想, 并抛出问题: 如何描述实际观测值与估计值的差异
了解统计量的作用	⑤ 展现构造统计量 χ^2 的过程并结合实例数据提问: 怎样确定 χ^2 大小的标准
分析显著性水平的功能	⑥ 从小概率事件和犯“弃真”错误两个角度说明 $P(\chi^2 \geq x_\alpha) = \alpha$ 的道理 ⑦ 给出常用的 α 和相对应的临界值 x_α 及检验法则
呈现具体步骤及例题	⑧ 给出独立性检验的具体步骤并示以例题

三、结论与建议

斯根普提出“数学理解”的两种模式: “工具性理解”和“关系性理解”. 这“两种理解”经国内学者本土化为“工具性理解”、“关系性理解”和“创新性理解”. 高中独立性检验的教学是在无假设检验的知识背景之下进行的, 这为教师的理解和课堂的开展带来了困难. 经过对“两种理解”在独立性检验中的教学的可行性分析, 笔者认为: 在高中独立性检验的教学中, 统计量的概念、的概率分布以及显著性水平与临界值之间的关系宜采用“工具性理解”, 显著性水平这一核心概念宜采用“关系性理解”. 鉴于独立性检验在统计知识中的相对独立的地位及课程标准对此部分内容要求较低, 教师在教学中应抓住前文

介绍的五个可执行步骤.

参考文献:

- [1] 章建跃. 理解数学是教好数学的前提[J]. 数学通报, 2015, 54(01): 61-63.
- [2] Skemp R. Relational and Instrumental Understanding [J]. Mathematics Teaching, 2007, 7(7): 20.
- [3] 李勇, 章建跃, 张淑梅, 刘文慧. 全国重点高中数学教师概率统计知识储备现状调查[J]. 数学通报, 2016, 55(09): 1-9.
- [4] 李健, 甄祎明. 高中数学教师的概率统计教学: 困境与对策 [J]. 基础教育课程, 2021(20): 76-80.
- [5] 余瑶, 张春莉. 国外数学理解研究的进展与展望 [J]. 教育学报, 2018, 14(01): 35-44.
- [6] 任伟芳, 偶伟国, 龚辉, 张敏, 朱赛飞, 王继光, 张奠宙. “工具性理解”“关系性理解”和“创新性理解”[J]. 数学教育学报, 2014, 23(04): 69-73.
- [7] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书(数学选择性必修第三册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [8] 苏教版高中数学教材编写组. 普通高中教科书(数学选择性必修第二册)[M]. 南京: 江苏凤凰教育出版社, 2019.
- [9] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [10] 吴启富, 张玉春. 统计假设检验中小概率原理的辨析[J]. 统计与决策, 2012(17): 70-71.
- [11] 马复. 试论数学理解的两种类型——从 R. 斯根普的工作谈起[J]. 数学教育学报, 2001(03): 50-53.

(收稿日期: 2022-09-14)