

炼方法 促回归

——以“二次函数”为例谈高三一轮复习教学

龙艳文

(江苏省南京市教学研究室, 210018)

摘要:以“炼方法、促回归”为核心的教学模式,可以提高高三数学一轮复习的有效性。通过“二次函数”复习的设计与分析,指出这一教学模式的基本流程是:确立学习目标;进行课前测试;由题组炼方法;用例题促回归;实施课后反馈。基本原则是:以题组为载体;以基本想法为核心;以回归为追求;以笔记为关键。

关键词:教学设计 一轮复习 题组 方法 回归

高三一轮复习时,学生已经基本掌握了高中数学知识,具备了一定的解题经验,认识和体验了基本的数学思想和方法。如何提高高三数学一轮复习的有效性?笔者提出了以“炼方法、促回归”为核心的教学模式,以求能达到全面梳理和熟练掌握高中数学知识,构建和完善知识网络,丰富地积累数学解题经验,灵活地运用数学思想和方法,提升学生思维品质,并为二轮复习提供全面、扎实、系统、灵活的知识储备和联想的固着点的目的。下面以“二次函数”复习为例加以说明。

一、“二次函数”复习的设计与分析

(一)学习目标的确立

所谓“学习目标”,就是将课程标准的目标分解为可接受的学生的具体行为表现,使学习结果的行为指标可观察、测量,有现实性、可行性,且使具体目标与概括性目标相关联。学习目标可促进教师树立目标意识,增加教学的针对性。具体到“二次函数”的复习,学习目标如下:

1. 准确理解二次函数、一元二次方程、一元二次不等式之间的联系。

2. 熟练掌握二次函数的图像,并能运用图像快速分析二次函数的值域和性质(如对称性、单调性、奇偶性等)。

3. 熟练掌握二次函数解析式的三种表示形式,并能合理选择表示形式求解析式。

4. 准确掌握二次函数在给定区间上最值的分类讨论。

(二)课前测试的选择

课前测试的价值是引出本节课的知识。按照分解后的学习目标,以知识为线索编制题目,所选题目简洁、有针对性,直接反映本节课所要呈现知识的简单应用。对于“二次函数”的复习,笔者设计了如下5个课前测试题:

1. 函数 $f(x)=2x^2-x-1$ 与 x 轴的交点个数为_____,其零点为_____,不等式 $2x^2-x-1>0$ 的解集为_____。

2. 已知二次函数 $y=-x^2+2mx-m^2+3$ 图像的对称轴方程为 $x=-2$,则 $m=$ _____,顶点坐标为_____,递增区间为_____,递减区间为_____。

3. 函数 $f(x)=x^2+4ax+2$ 在 $(-\infty,6)$ 内递减,则实数 a 的取值范围是_____。

4. 函数 $y=-x^2+2x+1, x\in[-1,2]$ 的值域是_____。

5. 作函数 $f(x)=x^2-|2x-1|$ 的图像,并求函数 $f(x)$ 的单调区间和最值。

这里选择的5道前测题分别针对和检测如下知识和方法目标:(1)理解二次函数、一元二次方程、一元二次不等式之间的联系,掌握图像交点、方程根、函数零点、不等式解集的求法以及方程根个数的判断方法。(2)体验利用二次函数的图像分析二次函数的值域和性质(如对称性、单调性、奇偶性等)。(3)掌握利用二次函数的图像分析对称轴与单调性之间的联系。(4)掌握简单利用二次函数的图像分析求值域的问题,理解对称轴与定义区间位置关系对最值的影响。(5)体验将

问题转化为二次函数图像的问题,掌握二次函数草图的画法和要求。

(三)由题组炼方法

题组的价值是引出本节课的方法。通过一个问题形成一种方法,通过一组问题形成一类问题的基本想法。通过题组中各个问题的特征分析和比较达成学生迁移的清晰度,通过教师概括的基本想法达成学生迁移的概括度,从而为学生提供迁移的固着点。题组设计的核心原则是:小问题大道理,去繁化简,去枝留干。题组教学要突出多题同源、多题同法、多题递进,强调“一节课只干一件事,干好一件事”;要寻求解题的本源、数学的本质,追求“万变不离其宗”之境界。针对本课,笔者设计了如下2个题组:

1. 题组1:求二次函数解析式。

题1 求满足下列条件的二次函数 $y=f(x)$ 的解析式:

(1)已知 $f(x)$ 对任意 x 均满足 $f(x+1)-f(x)=2x$,且 $f(0)=1$ 。

(2)已知 $f(x)$ 对任意 x 均满足 $f(2-x)=f(2+x)$,且最小值为-1,与 y 轴交点的坐标为 $(0,11)$ 。

(3)已知不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(1,2)$,且函数 $y=f(x)$ 的图像过点 $(-1,2)$ 。

二次函数一般设为3种形式:(1)一般式,即 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 。(2)顶点式,即 $f(x)=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$ 。(3)零点式,即 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$ 。解题中,应合理根据条件选择二次函数解析式的表示形式。

2. 题组2:二次函数在区间上最值的分类讨论。

求 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 在区间 $[m,n](m<n)$ 上的最值,关键是把握对称轴与区间的位置关系(见表1),即应先分为左、中偏左、中偏右、右4种情况,再根据具体问题进

行合并或取舍。

题2 已知 $f(x) = x^2 + ax, x \in [0, 1]$, 求 $f(x)$ 的最小值。

变式 已知 $f(x) = x^2 + ax, x \in [0, 1]$, 求 $f(x)$ 的最大值。

题3 已知 $f(x) = x^2 + 2x - 2, x \in [t, t + 1]$, 若 $f(x)$ 的最小值为 $h(t)$, 求 $h(t)$ 。

变式 已知 $f(x) = x^2 + 2x - 2, x \in [t, t + 1]$, 若 $f(x)$ 的最大值为 $g(t)$, 求 $g(t)$ 。

这里的题组1、3个问题反映3种解析式的选择,3个问题的比较帮助学生理解如何选择解析式,达成掌握二次函数解析式3种表示形式的目标。题组2,通过问题和变式的解决,理解分类求最值的方法;通过问题和变式的比较,理解分类过程的区别与联系;通过题2(对称轴动、区间不动)和题3(区间动、对称轴不动)的比较,理解分类讨论的相通性和一致性,从而形成此类问题的基本想法。

(四)用例题促回归

例题的价值是回归基本想法。回归基本想法的关键在于在不同的复合情境中发现问题背后所隐含的共同特征及解决此类问题一致性的基本想法。教师通过例题分析,引导学生对综合问题进行分解、识别、联想、选择,突出怎么想、如何想;让学生理解如何识别源问题与目标问题之间共同或类似的内在联系,理解题组中基本想法与新问题之间如何生成联系。

表1

位置	区间的左侧	区间的中间偏左	区间的中间偏右	区间的右侧
范围	$-\frac{b}{2a} \leq m$	$m < -\frac{b}{2a} \leq \frac{m+n}{2}$	$\frac{m+n}{2} < -\frac{b}{2a} \leq n$	$n < -\frac{b}{2a}$
图像				
最值	$y_{\max} = f(n),$ $y_{\min} = f(m)$	$y_{\max} = f(n),$ $y_{\min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$y_{\max} = f(m),$ $y_{\min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$y_{\max} = f(m),$ $y_{\min} = f(n)$

系。针对本课,笔者设计了如下3个例题:

例1 已知二次函数 $y = f(x)$ 的图像过点 $(0, -3)$, 且 $f(1) = f(3) = 0$ 。

(1)若 $F(x) = f(x) - mx$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增,求实数 m 的取值范围;

(2)设 $h(x) = f(\sin x)$, 求 $h(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最值。

例2 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a , 不等式 $f(x) > -2x$ 的解集为 $(1, 3)$ 。

(1)若方程 $f(x) + 6a = 0$ 有两个相等的实数根,求 $f(x)$ 的解析式;

(2)若 $f(x) > -3$ 在区间 $[0, 1]$ 上恒成立,求 a 的取值范围。

例3 设 a 为实数,函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + x - a(x \in [\sqrt{2}, 2])$ 的最大值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 。

讲解例1时,要进行如下回归:(1)求解解析式回归到题组1中二次函数3种解析式的基本想法,通过比较3种选择的优劣,分析选择的原因。(2)单调性问题回归到利用二次函数的图像分析对称轴与单调性之间联系的基本想法。(3)理解通过换元法转化为二次函数问题,回归到求二次函数最值问题的基本想法。

讲解例2时,要进行如下回归:(1)求解解析式回归到二次函数3种解析式的基本想

法,分析设零点式的原因和其他形式的不合理,注意选择不同形式来设的区别。(2)将恒成立问题分解为二次函数最值问题,回归到二次函数最值分类讨论的基本想法,分别合并中间偏左、左侧的情况和中间偏右、右侧的情况。

讲解例3时,要进行如下回归:通过更为复杂的分类形式,考虑开口方向和 $a=0$ 的情况;在确定开口方向后,将问题回归到二次函数最值分类讨论的基本想法。

(五)课后反馈的实施

限于篇幅,本课的练习设计不多赘述。需要提醒的是,学生在练习前要先复习和回顾题组,利用形成的基本想法思考和解决问题。教师在讲评时要分析学生的思维障碍(或错误),分析如何突破障碍,引导学生回归笔记,从中找到基本想法作为迁移点。

二、“炼方法、促回归”教学的思考

(一)以题组为载体

高三数学一轮复习中,很多教师在讲评完知识点后,通常会分析几个综合性的例题,然后用例题来分析方法。这种形式因问题的综合性和解题条件的局限性,会使学生缺乏对一类问题特征的清晰认识和对一类问题所有方法的全面、系统的把握。以题组为载体,首先是单个的问题,每个问题简单且特征明晰,从一个问题的分析形成一个方法;其次更重要的是题“组”,通过组中几个问题的对比分析,让学生更清晰地认识一类问题的特征,从而全面地掌握、合理地选择方法——达成影响学习迁移的认知结构3个特征中的清晰度。

(二)以基本想法为核心

通过题组的教学,要让学生对基本问题形成想法——注重通性通法,但不回避巧妙方法。要通过对题组中不同问题的比较,让学生沟通各种问题之间的联系和区别,做到形变法同,异题同法,形成一致想法。教师要在学生理解和感悟的基础上,形成具有较高

概括性、包容性和强力解释效应的基本想法,为新的学习提供固着点——达成影响学习迁移的认知结构3个特征中的概括度。

(三)以回归为追求

教学的追求在于,提高学生的思维能力和解决问题能力,所以,教师要引导学生回归由题组所形成的基本想法来解决各种问题,为激活原有经验提供主动性。例题教学中,教师要突出学生如何想、想什么,以强化学生回归基本想法的意识和能力。通过题组的解决、基本想法的形成,最终追求解题的回归,让学生感受到数学的本质是通过转化回归到已知问题,以解决未知问题。

(四)以笔记为关键

人们在解决问题时所获得的经验不仅包括解题技能,还包括解题记忆。学生在学习初期对问题和方法的认识比较清晰,但随着时间的推移,记忆会模糊甚至遗忘。笔记本的使用为学生及时复习和回顾提供可能。学生在课上利用草稿本记录关键点,在课后再完整地整理题组的解题过程和基本想法;在平时做题中,学生可以不断利用笔记中的基本想法去思考,并及时完善新的基本问题和基本想法;在学完一周或一个单元后,学生可以对笔记进行复习;在考前和二轮复习中,学生可以反复回顾和反思题组——达成影响学习迁移的认知结构3个特征中的巩固度。

总之,一轮复习中,教师要坚持引导学生分析问题特征、识别问题类型,联想所有方法、合理选择方法、形成解题思路,从而化繁为简、领悟大道,达到“以不变应万变”的境界。

参考文献:

- [1] 皮连生. 教育心理学(第三版)[M]. 上海: 上海教育出版社, 2005
- [2] 龙艳文. 以题组教学为核心的一轮复习环节设计[J]. 数学通报, 2014(2)