

数学高考一轮复习专题之一

集合与常用逻辑用语

红安 黄孝银 胡全福

高考试题中对“集合与常用逻辑用语”的考查相对稳定:对集合部分的考查有一道选择题或填空题,考查对集合含义的理解与集合的运算,为容易题.对于简易逻辑部分的考查,主要考查充要条件的概念,命题的否定等基本概念,并与其他知识综合在一起进行考查,为中档题.

要点1 集合的概念

例1 若 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\} = \{a^2, a+b, 0\}$, 则 $a^{2011} + b^{2012} =$

解析 易知 $\frac{b}{a} = 0$, $a^2 = 1$, $a \neq 1$, 所以 $b = 0$, $a = -1$, $a^{2011} + b^{2012} = -1$.

点拨 要考虑到集合中元素的三个特征:确定性,互异性,无序性.

要点2 集合的表示

例2 已知集合 $A = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数, 且 } x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数, 且 } y = x\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解析 集合 A 表示单位圆上所有点的集合;集合 B 表示直线 $y = x$ 上所有点的集合,由于直线经过圆内的点 $O(0, 0)$,故直线与圆有两个交点,故选 C.

点拨 特别要注意区分:

$\{y | y = f(x)\}$ 为数集,表示函数 $y = f(x)$ 的值域;

$\{x | y = f(x)\}$ 为数集,表示函数 $y = f(x)$ 的定义域;

$\{(x, y) | y = f(x)\}$ 为点集,表示函数 $y = f(x)$ 图象上点的集合.

要点3 元素与集合或集合与集合间的关系

例3 设集合 $M = \{a, b\}$, 则满足 $M \cup N \subsetneq \{a, b, c\}$

的集合 N 的个数为()

A. 1 B. 4 C. 7 D. 8

解析 显然 $c \notin N$, 否则 $M \cup N = \{a, b, c\}$, 则 $N \subseteq M$, 即求 M 的子集个数,选 B.

点拨 若 $\text{card}(A) = n$, 则 A 的子集个数为 2^n ; A 的真子集个数为 $2^n - 1$.

要点4 集合的运算

例4 设全集 $U = M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M \cap \complement_U N = \{2, 4\}$, 则 $N =$ ()

A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{1, 3, 4\}$
C. $\{1, 4, 5\}$ D. $\{2, 3, 4\}$

解析 画出韦恩图,可知 $N = \{1, 3, 5\}$, 选 B.

点拨 集合的运算要注意集合运算的定义,数形结合,常利用韦恩图、数轴或直角坐标系去解决.

要点5 命题的否定、命题的否命题

例5 命题“对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”的否定是()

A. 不存在 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$
B. 存在 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \geq 0$
C. 存在 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 > 0$
D. 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 > 0$

解析 将“任意”改为“存在”,再否定结论,得到“存在 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 > 0$ ”,故选 C.

点拨 命题的否定与否命题不同,命题的否定是将全称量词改为特称量词,或将特称量词改为全称量词,再否定结论即可.

要点6 复合命题与四种命题的真假

例6 函数 $f(x)$ 的定义域为 A , 若 $x_1, x_2 \in A$ 且 $f(x_1) = f(x_2)$ 时总有 $x_1 = x_2$, 则称 $f(x)$ 为单函数. 例如, 函数 $f(x) = 2x + 1 (x \in \mathbf{R})$ 是单函数. 下列命题:



- ①函数 $f(x)=x^2$ ($x \in \mathbf{R}$) 是单函数;
 ②指数函数 $f(x)=2^x$ ($x \in \mathbf{R}$) 是单函数;
 ③若 $f(x)$ 为单函数, $x_1, x_2 \in A$ 且 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$;

④在定义域上具有单调性的函数一定是单函数.
 其中的真命题是____.(写出所有真命题的编号)

解析 对于①, 若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $x_1=\pm x_2$, 不满足; ②是单函数; ③实际上是单函数命题的逆否命题, 故为真命题; 根据定义, ④满足条件. 填②③④.

点拨 判断一个命题的真假常常转化为判断其逆否命题的真假.

要点7 充分条件与必要条件

例7 若集合 $P=\{1, 2, 3, 4\}$, $Q=\{x|0 < x < 5, x \in \mathbf{R}\}$, 则()

- A. $x \in P$ 是 $x \in Q$ 的充分条件, 不是 $x \in Q$ 的必要条件
 B. $x \in P$ 不是 $x \in Q$ 的充分条件, 是 $x \in Q$ 的必要条件
 C. $x \in P$ 是 $x \in Q$ 的充分条件, 又是 $x \in Q$ 的必要条件
 D. $x \in P$ 既不是 $x \in Q$ 的充分条件, 又不是 $x \in Q$ 的必要条件

解析 $x \in P \Rightarrow x \in Q$, 反之不然, 故选 A.

例8 $a < 0$ 是方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 至少有一个负数根的()

- A. 必要不充分条件
 B. 充分不必要条件
 C. 充分必要条件
 D. 既不充分也不必要条件

解析 当 $\Delta = 2^2 - 4a > 0$, 得 $a < 1$ 时方程有根. $a < 0$ 时, $x_1 x_2 = \frac{1}{a} < 0$, 方程有负根. 又 $a = 1$ 时, 方程根为 $x = -1$, 所以选 B.

点拨 从集合观点看, 若 $A \subseteq B$, 则 A 是 B 的充分条件, B 是 A 的必要条件; 若 $A = B$, 则 A、B 互为充要条件.

专题训练1

1. 已知全集 $U = \{x|x < 6, x \in \mathbf{N}^*\}$, 集合 $A, B \subsetneq U$, 且 $A \cap B = \{2\}$, $\complement_U A \cap B = \{4\}$, $\complement_U A \cap \complement_U B = \{1, 5\}$, 那么下列结论正确的是()
 A. $3 \in A, 3 \in B$ B. $3 \in B, 3 \notin A$
 C. $3 \notin A, 3 \notin B$ D. $3 \in A, 3 \notin B$
 2. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$,

则满足 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合 S 的个数为()

- A. 57 B. 56 C. 49 D. 8

3. 已知集合 U 为全集, 集合 $M, N \subsetneq U$, 若 $M \cap N = N$, 则()

- A. $\complement_U M \supseteq \complement_U N$ B. $M \subseteq \complement_U N$
 C. $\complement_U M \subseteq \complement_U N$ D. $M \supseteq \complement_U N$

4. “ $x = 3$ ”是“ $x^2 = 9$ ”的()

- A. 充分而不必要的条件
 B. 必要而不充分的条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要的条件

5. 下列命题中, 真命题是()

A. $\exists m \in \mathbf{R}$, 使函数 $f(x) = x^2 + mx$ ($x \in \mathbf{R}$) 是偶函数

B. $\exists m \in \mathbf{R}$, 使函数 $f(x) = x^2 + mx$ ($x \in \mathbf{R}$) 是奇函数

C. $\forall m \in \mathbf{R}$, 使函数 $f(x) = x^2 + mx$ ($x \in \mathbf{R}$) 都是偶函数

D. $\forall m \in \mathbf{R}$, 使函数都 $f(x) = x^2 + mx$ ($x \in \mathbf{R}$) 都是奇函数

6. 若实数 a, b 满足 $a \geq 0, b \geq 0$, 且 $ab = 0$, 则称 a 与 b 互补, 记 $\phi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b$, 那么 $\phi(a, b) = 0$ 是 a 与 b 互补的()

- A. 必要而不充分条件
 B. 充分而不必要条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要的条件

7. 若全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x|x \geq 1\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.

8. 如果 $A = \{x||3x - 1| < 9\}$, $B = \{x|\frac{3x+1}{3} \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap B$ 的子集共有_____个.

9. 命题“存在 $x < 0$, 有 $x^2 > 0$ ”的否定是_____.

10. 写出命题“当 $abc = 0$ 时, $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $c = 0$ ”的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断它们的真假.



【参考答案】

1. D 2. B 3. C 4. A 5. A 6. C
 7. $\{x|x < 1\}$ 8. 64 9. 对任意 $x < 0$, 有 $x^2 \leq 0$.
 10. 原命题: 若 $abc = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $c = 0$, 是真命题. 逆命题: 若 $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $c = 0$, 则 $abc = 0$, 是真命题. 否命题: 若 $abc \neq 0$, 则 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 且 $c \neq 0$, 是真命题. 逆否命题: 若 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 且 $c \neq 0$, 则 $abc \neq 0$, 是真命题.