



对高三一轮复习的 几点思考 ——以函数与导数复习为例

◇ 江西 谭广勇

年年岁岁题相似,岁岁年年人不同,随着 2018 年高考的落幕,新一届高三一轮复习也随之开始.一轮复习除了要系统归纳梳理重要的知识点、考点之外,更重要的是要为学生指明复习的方向.

1 如何回归课本,夯实基础?

在高三一轮复习时,每位老师都会强调“回归课本,夯实基础”,然而在实际的复习过程中,我们该怎么做才能真正达到“回归课本,夯实基础”呢?

例如在函数部分我们逐一复习了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等图象和性质,在把握函数图象、性质的同时要关注这些函数的综合.

例 1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq a, \\ x^2, & x < a, \end{cases}$ 则“ $a \leq 0$ ”是“函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增”的().

- A 充分而不必要条件;
- B 必要而不充分条件;
- C 充分必要条件;
- D 既不充分也不必要条件

解析 本题以分段函数的形式,综合考查幂函数 $h(x) = x^2$ 与指数函数 $g(x) = 2^x$,在同一坐标系中画出 2 个函数的基本图象,如图 1 所示.由图可知 2 个函数有 3 个交点,其中的 2 个交点分别是 $(2, 4)$, $(4, 16)$,显然函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的单调性与 $x = a$, $x = 2$ 和 $x =$

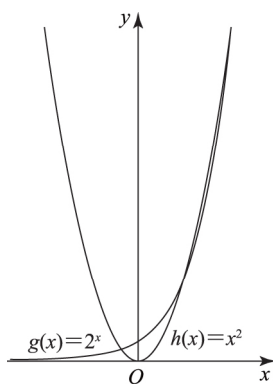


图 1

4 的关系有关,由图易知当 $a \leq 2$ 或 $a \geq 4$ 时,均使函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调递增.故选 A.

点评 类似地还有函数 $y = x^2$ 与 $y = x^3$, $y = \log_2 x$ 与 $y = \sqrt{x}$ 等.准确把握这些函数的关系,即可顺利找到问题的突破口.

函数之间的关系也可以通过四则运算或复合运算进行综合.如 $y = x - \ln x$, $y = x \ln x$, $y = \frac{x}{\ln x}$,复习中要对这些组合函数进行拓展研究.

例 2 (2017 年全国卷 I) 设 x, y, z 为正数,且 $2^x = 3^y = 5^z$, 则().

- A $2x < 3y < 5z$;
- B $5z < 2x < 3y$;
- C $3y < 5z < 2x$;
- D $3y < 2x < 5z$



解析

由题中条件可得 $x \ln 2 = y \ln 3 = z \ln 5$, $x : y : z = \frac{1}{\ln 2} : \frac{1}{\ln 3} : \frac{1}{\ln 5}$, $3y : 2x : 5z = \frac{3}{\ln 3} : \frac{4}{\ln 4} : \frac{5}{\ln 5}$. 利用导数可证:当 $x > e$ 时, $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ 是增函数,所以 $\frac{3}{\ln 3} < \frac{4}{\ln 4} < \frac{5}{\ln 5}$, $3y < 2x < 5z$. 故选 D.



点评

本题的解法,利用了函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ 的单调性.

2 如何将所学知识进行拓展、引申?

将基本的结论、原理进行拓展、引申,不仅是我们的复习的重要方式,而且也是高考命题的常见视角.如,利用导数知识容易判断 $y = \ln x$ 与 $y = x - 1$, $y = x$ 与 $y = \sin x$ 等函数的关系,进而可得结论当 $x > 0$ 时, $\ln x \leq x - 1$, $\sin x < x$ 等.



例 3

已知函数 $f(x) = \ln x$.

(1) 求证:当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$;

(2) 若 $x - 1 > a \ln x$ 对任意 $x > 1$ 恒成立,求实数 a 的最大值.



解析

(1) 略.
(2) 由不等式 $x - 1 > \ln x (x > 1)$ 得,当 $a \leq 1$, $x - 1 > a \ln x$ 恒成立. $x - 1 > \ln x (x > 1)$ 的证明过程略.

当 $a > 1$ 时,设 $h(x) = x - 1 - a \ln x (x > 1)$,依题意得,对于任意 $x > 1$, $h(x) > 0$ 恒成立. $h'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x - a}{x}$,则在区间 $(1, a)$ 上, $h'(x) < 0$,所以 $h(x)$ 在区间 $(1, a)$ 上单调递减,所以 $h(a) < h(1) = 0$,即当 $a > 1$ 时,总存在 $h(a) < 0$,不符合题意.

综上所述,实数 a 的最大值为 1.



点评

本题以不等式 $x - 1 \geq \ln x (x > 0)$ 为命题视角,熟悉这一原理,问题的求解自然水到渠成.类似地还有 $y = e^x$ 与 $y = x + 1$, $y = x$ 与 $y = \tan x$ 的关系等,准确把握这些函数关系,常可洞悉命题视角,迅速找到解题思路.



3 哪种解法更适合学生？

对于同一个问题，学生思考的视角不同，就会产生不同的解法，但具体应该用哪种方法来求解，需要因人而异。

 例4 已知函数 $f(x) = x^2 - 2a \ln x (a \neq 0)$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若曲线 $f(x)$ 没有零点，求实数 a 的取值范围。

 (1) 略。

 解析 (2) 若函数 $f(x)$ 没有零点，等价于方程 $x^2 - 2a \ln x = 0$ 无解，显然 $x = 1$ 不是零点，等价于 $a = \frac{x^2}{2 \ln x}$ 无解。

设 $g(x) = \frac{x^2}{2 \ln x}$, $g'(x) = \frac{4x \ln x - 2x}{(2 \ln x)^2} = \frac{2x(2 \ln x - 1)}{(2 \ln x)^2}$. 令 $g'(x) = 0$, 则 $x = \sqrt{e}$, 所以在区间 $(0, 1)$ 和 $(1, \sqrt{e})$ 内, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 在区间 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 内, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增. 所以函数 $g(x)$ 在 $x = \sqrt{e}$ 处取得极小值 $g(\sqrt{e}) = e$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow 0$; 当 $x < 1$, 且 $x \rightarrow 1$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x > 1$, 且 $x \rightarrow 1$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(0, e)$.

 点 评 解答此问题时, 部分学生选择将函数零点转化为 2 个函数图象的交点来处理, 则问题转化为函数 $y = x^2$ 与 $y = 2a \ln x$ 的图象没有交点. 结合图象知当 $a < 0$ 时, 函数图象恒有交点, 不符合题意. 当 $a > 0$ 时, 只要保证函数 $y = 2a \ln x$ 的图象恒在 $y = x^2$ 图象的下方即可, 将问题转化为 $f(x) = x^2 - 2a \ln x > 0$ 恒成立, 即 $f_{\min}(x) > 0$, 根据极小值及极限定义, 进而问题得解。

其实, 大多数学生更倾向于这种解法, 但对于解答题而言, 缺乏严谨性, 如果直接否定会严重打击学生的积极性. 既然学生喜欢这种解法, 我们何不顺其自然, 将这种解法进一步完善呢? 完善的过程也很简单, 只需说明当 $a < 0$ 时, 函数存在零点即可, 此时取 $x = 1$, 得 $f(1) = 1 > 0$, $x = e^{\frac{1}{a}}$, $f(e^{\frac{1}{a}}) = (e^{\frac{1}{a}})^2 - 2 < 0$, 所以存在零点, 与题意不符. 这样既实现了问题的解答, 又满足了学生的学习欲望, 何乐而不为呢?

4 如何设计题型, 才能帮助学生提升解题能力?

在完成解答后, 需要设计几道类似的题目, 让学

生解决, 使他们带着新问题再次体会问题的本质, 从而加深理解. 这样就真正的达到了“做一题, 会一类”的效果。

 例5 点 A 、 B 分别是曲线 $f(x) = 2e^x + x$ 与直线 $y = 2x - 2$ 上的点, 则 $|AB|_{\min} =$ _____.

 解析 $|AB|$ 的最小值, 即点 A 到直线 $y = 2x - 2$ 距离的最小值. 设 $A(m, 2e^m + m)$, 由点 A 到直线的距离公式得 $|AB| = \frac{|m - 2e^m - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{2e^m - m + 2}{\sqrt{5}}$, 利用导数可求得函数 $y = 2e^m - m + 2$ 的最小值为 $3 + \ln 2$, 所以 $|AB|_{\min} = \frac{3 + \ln 2}{\sqrt{5}}$.

 点 评 本题也可通过求解曲线 $f(x) = 2e^x + x$ 与斜率为 2 的直线相切时的切点坐标, 再利用点到直线的距离公式进行求解。

变式 直线 $y = a$ 与 $f(x) = 2e^x + x$ 及直线 $y = 2x - 2$ 相交于 A 、 B 两点, 则 $|AB|_{\min} =$ _____.

 解析 如图 2, 过点 A 作直线 $y = 2x - 2$ 的垂线, 设垂足为 C . 设直线 $y = 2x - 2$ 的倾斜角为 α , 则 $\tan \alpha = 2$, 又 $\angle ABC = \alpha$, 所以 $\sin \angle ABC = \frac{2}{\sqrt{5}}$. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin \angle ABC = \frac{|AC|}{|AB|}$, 故 $|AB| = \frac{|AC|}{\sin \angle ABC}$. 所以当 $|AB|$ 取最小值时, $|AC|$ 最小. 由例 5 可知 $|AC|_{\min} = \frac{3 + \ln 2}{\sqrt{5}}$, 所以 $|AB|_{\min} = \frac{3 + \ln 2}{2}$.

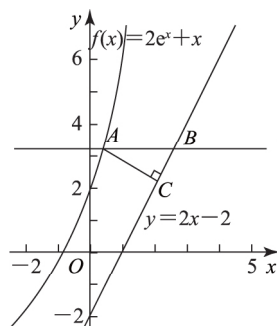


图 2

高三一轮复习重在回归课本、夯实基础, 同时要注重知识结构、网络体系的形成, 以便提高复习的有效性和高考的针对性; 追求一题多解, 一题多变, 学会类比、辨析, 从而在多法中选择最优的解法, 以便提高解题效率. 使学生真正做到学习有法、而不定法、贵在得法!

(作者单位: 江西省都昌县任远中学)