

理顺知识脉络

凸显系统思维

——以高三一轮复习“函数单调性”为例

宁夏回族自治区银川市第九中学 陈玉艳 杜云龙

函数是高中数学的核心内容,而函数单调性是函数最基本、最主要的性质之一,是函数概念的延续和拓展,对研究每一类具体函数都有指导意义,在高考中都有非常重要的地位.高三一轮复习函数单调性的教学中要关注学生单调性概念、利用单调性比较数的大小、解不等式等知识技能的掌握,借助历年高考真题有梯度、分阶段地找到知识的生长点,重视题后反思,促进学生深度思考,挖掘单调性与导数之间的一致性、联系性,剖析问题本质,搭起函数单调性的知识框架,以不变的知识原理应对万变的高考题目,使学生在掌握数学知识、学会数学思考的过程中,整体把握函数单调性,优化学生系统思维品质,提升学生的数学核心素养.

一、把握单调本质,强化数学基础

在初中阶段,学习一次函数、二次函数时,学生已经知道函数 y 随着自变量 x 的增大而增大或者减小,

(接上页)结果只写出元素,另一个方面运算结果的结构特征可以为提供解题的方向与思路.从并集、交集运算的结果看,学生发现并集得到的集合中含有集合 A , B 中所有的元素,是“大”的集合,交集得到的集合中含有集合 A , B 中共有的元素,是“小”的集合.因此从并集交集运算结果的感性认识上,学生就很容易发现集合 A , B , $A \cup B$, $A \cap B$ 之间的关系,以及 $A \cup B = A$, $A \cap B = A$ 等所反映的集合 A , B 之间的关系.再从理性的角度进一步严格的论证,发展学生严谨的逻辑思维.

3.2 建构数学运算的学习,发展数学运算素养

新课程的理念要求重视教,更要重视学,促进学生学会学习.集合的基本运算是高中数学学习的一个数学运算,对后面学习对数运算、向量运算等具有指导意义.因此,在教学中要帮助学生建构对数学运算的学习路径与方法,发展学生的自主学习能力.集合运算学习的主要策略是类比和抽象.由于集合运算与数的运算之间的相似性,通过类比实数的加法得到并集运算,再类比并集运算的研究过程得到交集运

形成了通过函数图像观察函数单调上升或者下降的直观认知,只是没有明确提出函数的单调性概念而已;在高一阶段由形到数、从直观到抽象,利用形式化数学符号语言定义了函数单调性,初步形成代数方法论证函数单调性思想;高三一轮复习中设计题目时,不仅需要渗透再学单调性定义的必要性,更重要的是理解用静态的数学符号刻画动态的单调变化趋势,学会应用函数单调性解决问题.

1.1 返璞归真、重拾概念

数学概念学习贯穿于数学教学始终,以概念教学为抓手,深刻体会数学概念的内涵与外延,重建概念体系,提升学生对概念的理解与认知.高三学生已经具备了函数单调性的形式化定义,以增函数为例:

一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ,如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就说函数 $f(x)$ 在区

算.而在集合并集、交集概念的生成过程中,都是通过具体实例概括、抽象得到的.在对集合运算的理解中,从运算对象、运算法则、运算结果三个方面去认识集合运算,并从文字语言、符号语言、图形语言不同角度描述和理解其本质.同时理解数学运算体系.数学运算的学习包含运算法则的定义以及运算律的研究,通过相关的运算法则和运算律来简化运算,提升运算效率.在本节中只是涉及到简单的运算律(教材中的两个“思考”),不研究结合律、分配律等.但是还是应该跟学生渗透这学习体系,让学生感受集合运算的学习路径与方法,并在小结中让学生归纳、升华,形成数学的学习方式,获得进一步学习的能力,并在今后的学习中实践,实现数学运算素养的提升.

参考文献:

- [1] 李昌官.“集合的基本运算”研究型单元教学[J]. 中小学数学(高中版), 2020(12): 7-10
- [2] 沈良. 试论数学运算的理解与教学[J]. 中学教研(数学), 2019(2): 1-4

间 D 上是增函数. 联想割线斜率等价变形, 对任意的 $x_1, x_2 \in D$, 且 $x_1 \neq x_2$ 有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ 来定义增函数, 虽然看似只是形式的变化, 但打破了 $x_1 < x_2$ 约束限制, 体现了自变量取值任意、不关联性, 并为之对应函数值变化一致的增函数本质特点; 如果进一步延伸增函数的定义, 对 $\forall x, x+\Delta x \in D$ 且 $\Delta x \neq 0$, 都有 $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$ (或者 $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$) 成立, 接下来只要用 $\Delta x \rightarrow 0$ 的极限过程, 为函数的微分领域——导数的建立奠定基础.

通过上述增函数定义的三次认识, 环环相扣、自然而然、水到渠成的展开, 学生经历了由直观到抽象定义, 由特殊到一般的数学符号语言刻画函数性质, 原有知识积累的基础上持续认识下一阶段内容, 明确单调函数概念发展方向, 建立完整的单调函数概念体系.

1.2 固本培元、灵活运用

例 1 (2020 全国 I 卷 12) 若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2 \log_4 b$, 则 ().

- A. $a > 2b$ B. $a < 2b$ C. $a > b^2$ D. $a < b^2$

选题意图: 通过从数量关系的角度选择比较数的大小题型, 精准把握函数单调性的概念本质, 体现函数单调性的形式化定义反映了数的不等关系, 启发学生思考证明函数单调性的方法, 感悟从任意的自变量取值比较函数值大小得到函数单调性过程, 反思利用函数单调性探寻自变量或者因变量大小的变式, 从而提升学生素养.

解析: 设 $f(x) = 2^x + \log_2 x$, 可知 $f(x)$ 为增函数, 首先要比较 a 、 $2b$ 的大小, 通过作差 $f(a) - f(2b) = 2^a + \log_2 a - (2^{2b} + \log_2 2b)$ 再利用已知代换化简得 $f(a) - f(2b) = \log_2 \frac{1}{2} = -1 < 0$, 得 $f(a) < f(2b)$, 故 $a < 2b$. 其次比较 a 、 b^2 的大小, 由 $f(a) - f(b^2) = 2^a + \log_2 a - (2^{b^2} + \log_2 b^2)$ 同样利用已知代换化简得 $f(a) - f(b^2) = 2^{2b} - \log_2 b - 2^{b^2}$, 显然, $f(a)$ 、 $f(b^2)$ 的大小与 b 的取值有关, 当 b 分别取 1、2 时, $f(a)$ 、 $f(b^2)$ 的大小不确定, 故选 B.

教学反思: 高考中对利用单调性比较数大小的题目有着历史的传承, 虽然每年题目已知数或含参数方程形式结构在变化, 但解答方法本质上是一致的, 都是进一步对单调性形式化定义的理解、应用, 因此, 立足数学概念, 循序渐进、从零散走向系统, 多角度、全方位的教学既抓住了数学问题本质, 又促进学生理解数学原理, 实际问题有的放矢.

本题函数解析式不明朗、函数图像的走势不清晰, 首先需要帮助学生熟练掌握利用已知含参数方程条件构造函数, 明确利用函数单调性比较数的大小的目标, 最后依据单调性的整体性质, 作差比较函数值大小, 反向判断自变量大小. 实际上大多数学生已经掌握了证明单调性的固定套路, 即设元、作差、变形、定号, 但未能深入探究每个环节的作用与联系, 只是单纯的记忆模仿, 缺少真正理解用不等式形式定义单调性的本质含义, 考试中往往很难解决此类问题. 数学不仅仅是教给学生一些定义、概念、公式等结论, 更应该浸润学生的数学的精神、思维方法, 着眼于培养学生从数学角度发现、提出、分析和解决问题的能力, 提升学生数学核心素养.

二、挖掘导数本质, 聚焦关键能力

极限思想是导数概念学习的起点, 为了保证导数概念知识体系建立的逻辑性与系统性, 一般地, 采用从数列到数列极限, 再到函数极限, 最后生成导数概念的建构方式. 一轮复习教学设计中, 不能脱离极限思想, 更应该借鉴导数定义形成过程, 迁移思想、方法以及形式, 建立抽象函数导数概念, 明确在函数单调性基础上进一步学习导数的必要性, 并借助一些具体高考题目, 引导学生再理解导数概念, 挖掘导数本质, 把数学的认识由静止、有限提升到运动、无限, 感悟极限思想, 学会运用函数的极限思想方法描述问题、提出问题、分析问题、解决问题, 提升学生逻辑思维能力, 培养学生的数学应用意识.

2.1 承前启后、明确概念

导数描述任何事物的瞬时变化率, 考虑遵循高中生认知规律、以及现有知识水平, 在没有补充极限知识的基础上, 高中人教 A 版教科书选择学生比较熟悉的气球膨胀率问题和高台跳水运动有关速度问题的物理知识入手, 经历从绝对变化到平均变化, 再到瞬时变化的过程, 用形象直观的逼近思想方法定义导数, 使学生深刻体会到导数是时间 t 到 t_0 的量变引起平均速度到瞬时速度的质变过程, 脱掉物理与实际背景以后, 抽象出导数就是反映函数在某一点附近变化情况的本质内涵. 一般地, 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数, 记作 $f'(x_0)$.

一轮复习教学中, 并不是重新讲解导数的概念, 而是注重以教材为依据, 优化函数知识结构, 强化导

数概念生成过程,深化对函数认识,渗透和引导导数形成的思想方法,提升对导数概念本质的理解水平,体会从有限到无限的变化过程,形成高中函数学习知识体系,激发学生学习潜能,提升学生素养.

2.2 潜移默化、感悟微分

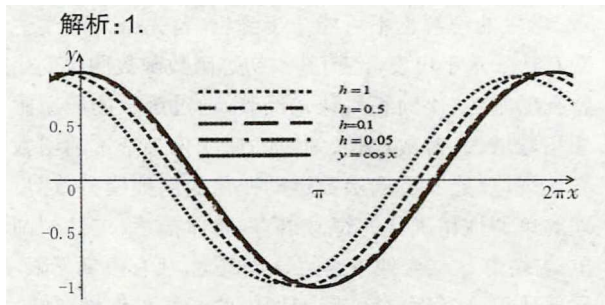
例2(人教A版2007选修2-2第19页,习题1.2B组第1题)请按下面步骤完成任务.

1. 利用信息技术工具,分别画出 $h=1, 0.5, 0.1, 0.05$ 时,函数 $y = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ 的图像.

2. 画出函数 $y = \cos x$ 的图像,并与上面四个图像比较,当 h 越来越小时,你观察到了什么?

3. 猜测 $y = \sin x$ 的导数,与基本初等函数导数公式表中 $y = \sin x$ 的导数公式一样吗?

选题意图: 首先,高考题目大都是以现行教材内容为依据,教材概念、例题、习题为依托,通过改编、融合、开拓、延伸生成新的高考题目,因此,选择教材内容作为出发点复习导数概念的生成过程,化归为学生熟悉的内容与方法,使得知识的生长有了根,才能得心应手的应对千变万化的数学题目;其次,利用信息技术直观感知正弦函数的导数与余弦函数的相等关系,借助正弦函数的平均变化到瞬时变化理解导数的概念,凸显一个函数的导数还是函数,为后续探究更复杂函数进行二次求导探究其图像与性质奠定理论依据.



2. 当 h 越来越小时, $y = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ 就越来越逼近函数 $y = \cos x$.

3. $y = \sin x$ 的导数为 $y = \cos x$.

教学反思: 数学概念是人脑对事物本质属性具有数学特征的概括反映,所以,理解概念就是引导学生明确区分此类事物与它类事物不同属性,从质的方面理解概念的内涵,认识概念所反映对象的范围,从量的方面理解概念的外延,建立数学运算法则基础上,通过形式化、符号化抽象出数学特征.

本例是在学生已经学习了实际生活情境与物理背

景下的导数概念基础上,增加情境难度,采用数学的情境体验导数概念的生成过程,通过变式教学引导学生逐步消除非本质属性,从定义某一点处的导数,借助学生熟悉的函数 $y = \sin x$,利用数学符号、图形语言上升到 $y = \sin x$ 的导函数,即表达出 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos x$,从数到形,数形结合,利用直观形象的形的变化探求极限和导数用无穷小量逼近的变化关系,进一步明确一般函数的导函数结构特征 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,感悟导数概念的思想及其内涵,发展学生理性思维.

三、注重交融贯通,凸显素养导向

导数是学生经历了函数绝对变化的形式化定义到差商之比的平均变化,再到瞬时变化的极限思想过程,建立起来的描述函数变化率的概念.理解每个变化特点,从整体到局部,从定性分析到定量比较,探寻单调性与导数内在联系,利用导数的大小定量刻画函数单调变化快慢程度,凸显函数性质研究方法的整体性与不同视角认识函数性质的系统性,有效地提升学生数学学科核心素养.

3.1 理顺脉络、形成系统

单调性与导数是贯穿整个函数主线学习过程中的一个核心内容,两者是统一的,相互补充.在某点处的导数是一个具体的函数值,它的正负没有办法判断该点邻域内函数的单调性,平常我们所说的导数是特殊的函数称为导函数,是函数每一点的导数,是在单调性形式化定义基础上建立起来的,是研究函数单调性的普适性、通用性、具体化的工具,不仅能够反映函数单调的变化规律,还能体现出函数单调变化的差异.

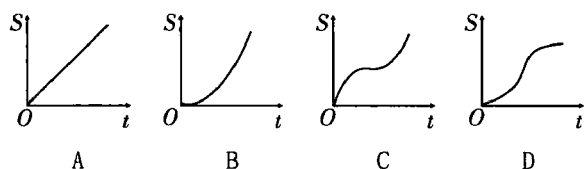
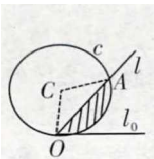
首先,导数的局部性与单调性的整体性相互依赖、密不可分,在函数 $y = f(x)$ 定义域 D 的某个区间 I 上,如果 $\forall x \in I$, 都有 $f'(x) > 0$,应用拉格朗日中值定理, $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ 使得 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 所以 $y = f(x)$ 在 I 上单调递增;同理,如果 $\forall x \in I$, 都有 $f'(x) < 0$, 则 $y = f(x)$ 在 I 上单调递减;反之,若函数 $y = f(x)$ 在 I 上单调递增且可导,则 $\forall x \in I, \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, 即 $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$, 再根据极限的局部保号性可得,都有 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$, 即在区间 I 上 $f'(x) \geq 0$ ($f'(x)$ 在 I 的任何子区间不恒为 0) 恒成立;同理, $y = f(x)$ 在 I 上单调递减且可导,则在区间 I 上 $f'(x) \leq 0$

($f'(x)$ 在 I 的任何子区间不恒为0)恒成立. 其次, 利用导数的绝对值大小定量分析函数在某个区间或某点附近增减的快慢程度, 结合学生熟悉的基本初等函数的具体实例, 通过计算比较导数的大小, 使学生能够区别于图像的不同视角, 更方便、更精确、更深刻地体会同样是增函数的指数爆炸、直线上升、对数增长函数模型的差异. 最后, 利用导数的单调性或二阶导数判断函数图像的弯曲方向(函数的凸凹性), 即如果函数 $y=f(x)$ 定义域 D 的某个区间 I 上二阶可导, 则在 I 上 $y=f(x)$ 为凸(凹)函数的充要条件是 $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$), $x \in I$.

3.2 异曲同工、提炼方法

例3(改编自人教A版2007选修2-2第65页, 复习参考题A组第9题)

如图, 直线 l_0 和单位圆 c 相切于 O 点, 当直线 l 从 l_0 开始在平面上绕点 O 按逆时针方向以角速度 ω 匀速转动时, 它扫过的圆内阴影部分的面积 S 是时间 t 的函数, 这个函数图像大致是().



选题意图: 从历年高考题目来看, 高考选题处处源于课本, 但往往又高于课本, 通过对教材题目的改编使学生产生对数学的亲切感, 对教材的认同感, 紧紧围绕教材不仅让学生在知识的量上有所收获, 而且能够了解知识的来龙去脉, 把握内容的前后逻辑关系, 体会其中蕴含的思想方法, 透过现象寻找概念的本质内涵, 使学生经历数学的发现和再利用过程, 发展学生“做数学”“用数学”的意识.

解法一: 根据圆的特征定性分析, 由于直线 l 从 l_0 开始在平面上绕点 O 按逆时针方向以角速度 ω 匀速转动时, 单位时间内直线 l 绕 O 转过的角度 $\Delta\theta$ 不变, 但在 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的开始阶段扫过的面积 ΔS 增加的慢, 以后 ΔS 增加的越来越快; 当 $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 的开始阶段扫过的面积 ΔS 增加的快, 以后 ΔS 增加的越来越慢. 反映在图像上, D符合上述变化规律.

解法二: 建立函数定量分析. 根据题意可知, 直线 l 扫过的圆内阴影部分的面积 $S(t) = S_{\text{扇形}ACO} - S_{\triangle ACO} = \frac{1}{2}\omega t - \frac{1}{2}\sin \omega t$. 由 $S'(t) = \frac{1}{2}\omega(1 - \cos \omega t) \geq 0$ 且 $S'(t)$ 在 R

的任何子区间不恒为0, 可得 $S(t) = \frac{1}{2}\omega t - \frac{1}{2}\sin \omega t$ 在 R 上单调递增, 又因为 $S''(t) = \frac{1}{2}\omega^2 \sin \omega t$, 当 $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $S''(t) > 0$, 所以 $S(t) = \frac{1}{2}\omega t - \frac{1}{2}\sin \omega t$ 的图像在 $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上凸的, 当 $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $S''(t) < 0$, 所以 $S(t) = \frac{1}{2}\omega t - \frac{1}{2}\sin \omega t$ 的图像在 $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上凹的, 故选D.

教学反思: 函数单调性是导数定量分析的基本前提, 导数定量分析使函数单调性更加科学、准确, 广泛而深入. 教学中, 常常定性地教给学生阴影面积随着时间先慢后快、再有快到慢的逐渐变大, 但学生往往不明白“为什么可以这样解”, 函数图像增减趋势以及变化快慢与导数的大小有怎样的关系? 只有找准概念的联系, 深化概念学习, 反思概念本质, 深刻理解知识, 定性定量相互补充, 拓宽思路、整体设计, 提炼方法、形成系统.

4. 结束语

高三一轮复习中对函数单调性内容的复习需要具有大局观、整体性、系统性, 主要目的是理顺学生掌握的零碎的、片面的、点状的知识, 形成网状知识结构体系, 高考题目不仅仅会考查函数单调性的知识点, 更关键是考查学生对单调性知识理解的素养, 对单调性知识应用的潜能. 函数单调性的教学不可能一蹴而就, 学生的理解也不可能一步到位, 首先必须从学生现有认知水平出发, 经历基本初等函数函数图像变化特征的阐述, 不断积累认知经验, 通过函数的应用感知指数增长、对数增长、匀(加)速变化等基本的函数变化规律, 建立不同函数运动变化的函数模型, 逐步理解单调性精确化的符号语言, 整体描述、定性刻画单调性; 其次结合抽象函数导数概念, 从有限到无限, 局部认识、定量分析实际问题中的函数单调性, 加深学生对导数概念的理解, 初步感悟极限思想; 最后, 适度拓展、重新整合知识, 交融贯通单调性与导数概念, 理顺逻辑关系, 明确相互联系, 凸显整体与系统, 完善认知结构, 实现知识的内化与升华, 有效地提升学生数学思维品质, 发展数学学科核心素养.

参考文献:

- [1] 马知恩, 王锦森. 高等数学疑难问题选讲[M]. 第一版. 北京: 人民教育出版社, 2014. 96.
- [2] 华东师范大学数学系, 数学分析上册[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2001. 150.