

思辨中发展 探究中提升*

——对一节“立体几何”高三第一轮复习课的思考

郑良(安徽省合肥市第四中学)

摘要:以(综合法)立体几何高三第一轮复习课的五道例题的教学为载体,呈现教学的基本流程,结合案例给出“变式教学,变出精彩”“适当延拓,指明方向”“直觉先行,逻辑跟进”“重视实物,善用技术”“构建整体,规范表达”教学实践以及笔者的教学思考。

关键词:立体几何;截面;理性思考;自然生长

文章编号:1002-2171(2021)10-0058-04

高三第一轮复习课不好上,如教学内容难度的把控,若难度较低学生就会觉得索然无味,无法激发他们的兴趣,而难度过高学生就会感到望尘莫及,严重挫伤他们的自信;又如课堂教学资料的调配,若对教材的简单重现,回归教材就会流于形式,若过于依赖复习资料则会异化为“题海战术”等。高三第一轮复习课到底怎样进行教学?笔者所在学校高三实验班数学教师A开设了(综合法)立体几何的复习课,下面简要呈现课堂教学过程,结合学科组评课意见及笔者的教学实践给出教学思考。

1 教学过程呈现

例1 如图1,在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为 AB, BC, C_1D_1 的中点。点 P 在底面 $ABCD$ 内,若直线 D_1P 与平面 EFG 无公共点,则线段 D_1P 长的最小值是()。

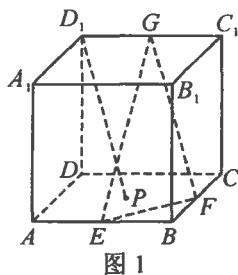


图1

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

部分学生给出图2,由平面 $D_1AC \parallel$ 平面 EFG 得出点 P 的轨迹是直线 AC 。教师追问如何找到平面 D_1AC 并使平面 $D_1AC \parallel$ 平面 EFG ? 点 P 在直线 AC 上满足条件,但满足条件的点 P 是否一定在直线

AC 上? 引发学生的理性思考,揭示出解答的缘由:过平面 α 外一点有且只有一个平面 β 满足平面 $\beta \parallel$ 平面 α 。解决本题的关键是确定过点 D_1 与平面 EFG 平行的平面,根据“第三个平面分别与两个平行平面的交线平行”应先找出过点 E, F, G 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面。师生借公理确定截面 $EFHG IJ$,如图3,

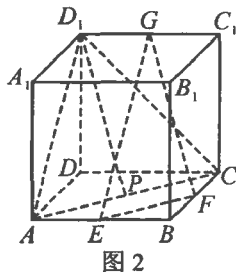


图2

从而确定点 P 的轨迹为线段 AC ,故当点 P 为线段 AC 的中点时,线段 D_1P 的长取得最小值,最小值为 $\sqrt{6}$ 。最后教师总结空间几何体的截面的概念,强调解决问题要注重结果,更要做足过程。即要从问题的结构形式出发找准切入点,追求思维过程的自然与简捷,完善逻辑推理过程。

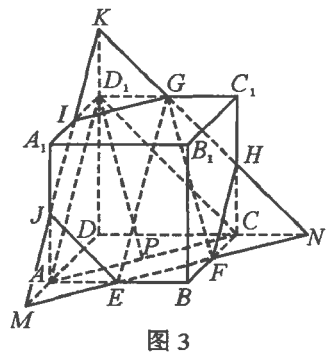


图3

例2 如图4,在棱长为6的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别在棱 C_1D_1 与棱 C_1B_1 上,且 $C_1E=4, C_1F=3$ 。求几何体 EFC_1-DBC 的体积 V 。

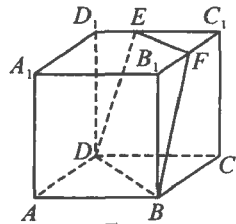


图4

教师分别展示学生的解题

* 本文系2021年度合肥市教育科学规划课题“核心素养导向下的高中数学单元教学课例研究”(课题编号HJG21098)阶段性研究成果。

过程,下面先呈现三种典型的错误解法。

错解 1:如图 5,联结 DF , DC_1 ,则几何体 EFC_1-DBC 被分割成三棱锥 $D-EFC_1$ 及四棱锥 $D-CBFC_1$,所以 $V=V_{D-EFC_1}+V_{D-CBFC_1}=12+54=66$ 。故几何体 EFC_1-DBC 的体积为 66。

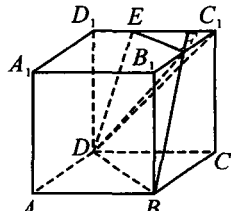


图 5

错解 2: $V=V_{E-FBC_1}+V_{E-BCC_1F}=12+60=72$ 。故几何体 EFC_1-DBC 的体积为 72。

错解 3: $V=V_{E-DBC}+V_{E-BCC_1F}=36+36=72$ 。故几何体 EFC_1-DBC 的体积为 72。

由几何体的某个顶点与其他所有顶点连线,将该几何体分割成若干个棱锥,则该几何体的体积转化为这若干个棱锥的体积之和。空间几何体确定,体积必然存在且唯一。结果为什么不同?抽丝剥茧,层层深入,出现以上错解的学生均按 B, D, E, F 共面对 EFC_1-DBC 进行分割,事实上, EF 与 DB 为异面直线。出现问题的根源既已找到,尝试解答的殊途同归。

解法 1:如图 6,取 C_1D_1 的中点为 G ,联结 GF, GD, DF ,则有 B, D, G, F 四点共面,故 $V=V_{GFC_1-DBC}+V_{F-DEG}=63+3=66$ 。故几何体 EFC_1-DBC 的体积为 66。

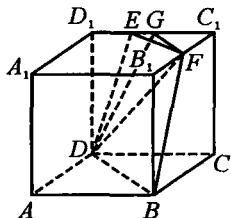


图 6

解法 2:如图 7,在棱 B_1C_1 上取 $C_1H=4$,联结 EH, HB, BE ,则有 B, D, E, H 四点共面,故 $V=V_{EHC_1-DBC}-V_{B-EFH}=76-4=72$ 。故几何体 EFC_1-DBC 的体积为 72。

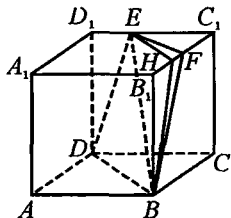


图 7

学生给出解题依据:解法 1 中平面 $BDGF$ 将几何体 EFC_1-DBC 分成三棱台 GFC_1-DBC 和三棱锥 $F-DEG$ 这两个几何体,此时 EFC_1-DBC 为凹多面体;解法 2 将几何体 EFC_1-DBC 先补成三棱台 EHC_1-DBC ,再割去三棱锥 $B-EFH$,此时 EFC_1-DBC 为凸多面体。图 6 与图 7 非常直观,但解法 1 与解法 2 的结论却不同。学生通过查找发现计算没有错误,几何体的分割也没有重复或遗漏。问题到底出在哪里?通过思辨,发现解法 1 中联结 DF ,解法 2 中联结 BE 得到的图形并不相同。学生经过合作交流得到:平面四边形 $ABCD$ 为 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 的组合图形,也为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 的组合图形;而空间四边形 $ABCD$ 则不宜看成 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 及 $\triangle ABC$

与 $\triangle ACD$ 的组合图形,一般从面积角度即可看出。另外,不共面的四点 B, D, E, F 能构成哪些图形?即几何体 EFC_1-DBC 未必为空间多面体。题目既然未明确几何体 EFC_1-DBC 的构成,自然无法计算其体积,因此本题是一道错题。教师强调解题时要将直观感知与理性思维结合起来,如用图来引导,而不能被图所误导,强化规范作图;叙述指向明确,语言表达精准简练,而不能含混不清、词不达意等。

例 3 如图 8,四边形 $EFGH$ 为四面体 $ABCD$ 的一个截面,若四边形 $EFGH$ 为平行四边形, $AB=4, CD=6$,求四边形 $EFGH$ 的周长的取值范围。

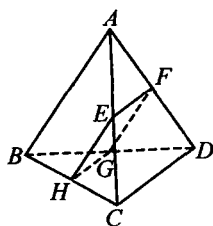


图 8

解析:因为四边形 $EFGH$ 为平行四边形,所以 $EF \parallel GH$,又 $EF \not\subset$ 平面 BCD , $GH \subset$ 平面 BCD ,所以 $EF \parallel$ 平面 BCD 。

又 $EF \subset$ 平面 ACD ,平面 $ACD \cap$ 平面 $BCD = CD$,则有 $EF \parallel CD$,同理可证 $EH \parallel AB$ 。

设 $EH=x, EF=y$,因为 $EF \parallel CD, EH \parallel AB$,所以 $\frac{EH}{AB} = \frac{CE}{AC}, \frac{EF}{CD} = \frac{AE}{AC}$,得 $\frac{EH}{AB} + \frac{EF}{CD} = \frac{CE}{AC} + \frac{AE}{AC} = 1$ 。又 $AB=4, CD=6$,则 $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$,从而 $y = 6(1 - \frac{x}{4})$, $0 < x < 4$,所以四边形 $EFGH$ 的周长 $l = 2(x+y) = 12-x$ 。由 $x \in (0, 4)$,得 $l \in (8, 12)$ 。所以四边形 $EFGH$ 周长的取值范围为 $(8, 12)$ 。

师生共同总结:根据四边形 $EFGH$ 为平行四边形,推出 $EF \parallel CD, EH \parallel AB$,进而建构求解目标关于某变量的函数,转化为函数的值域问题。

例 4 如图 9,在各棱长为 2 的正三棱锥 $A-BCD$ 中,平面 α 与棱 AB, AD, CD, BC 分别相交于点 E, F, G, H ,则四边形 $EFGH$ 的周长的最小值是()。

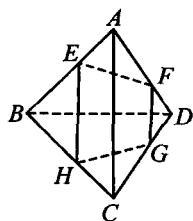


图 9

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

解析:将正三棱锥 $A-BCD$ 展开为平面图形,即把 $\triangle ADC$ 沿着 AD 翻折与 $\triangle ADB$ 共面,再把 $\triangle DBC$ 沿着 BC 翻折到平面 ABC 中,再把这个面沿着 AB 翻折到平面 ADB 中,如图 10。当 E, F, G, H 四点共线时,图 9 中四边形 $EFGH$ 的周长的最小值为 $2+2=4$ 。此时四边形

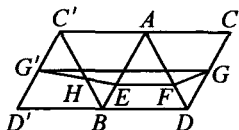


图 10

$EFGH$ 为平行四边形, 确保 E, F, G, H 四点共面。

教师点评: 求四边形 $EFGH$ 的周长的最小值, 可考虑建构该周长关于某变量的函数关系, 进而转化为求函数的最小值。也可先确定某个值, 然后再说明其是该周长的最小值。如何保持 E, F, G, H 四点共面? 对于多动点问题, 较难处理。在本题中, 对于图 10 中任意共线的点 E, F, G, H , 均能保证 $EFGH$ 为平面四边形。平面四边形 $EFGH$ 的周长有无最大值? 若有最大值, 最大值是多少? 直观上四边形 $EFGH$ 的周长逼近 $\triangle DAC$ 的周长。

例 5 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长为 4, $\angle ASB=30^\circ$, 在侧棱 SB, SC, SD 上分别取点 E, F, G , 则四边形 $AEFG$ 周长的最小值是_____。

教师在学生解答后给出变式: (以上条件不变) 使四边形 $AEFG$ 的周长最小时的 A, E, F, G 四点是否共面呢? 一般地, 已知正四棱锥 $S-ABCD$, $\angle ASB=\alpha (0<\alpha<\frac{\pi}{4})$, 在侧棱 SB, SC, SD 上分别取点 E, F, G , 则四边形 $AEFG$ 的周长取最小值时, 点 A, E, F, G 是否共面?

学生思考、交流, 不能给出完整解答, 教师展示答案如下。

解析: 将正四棱锥的侧面沿着 SA 剪开并铺在一个平面上, 如图 11 所示, 则四边形 $AEFG$ 周长的最小值即为线段 AA_1 的长度, 且 E_1, F_1, G_1

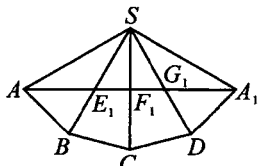


图 11

分别对应于图 12 中的 E, F, G 三点。不妨设正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长为 1, 得 $AA_1 \perp SF_1$, $SF_1 = \cos 2\alpha$, $AB = 2\sin \frac{\alpha}{2}$ 。

假设 A, E, F, G 四点共面, 又 $SC \perp EF$, $SC \perp FG$, $EF \subset$ 平面 $AEFG$, $FG \subset$ 平面 $AEFG$, $EF \cap FG = F$, 所以 $SC \perp$ 平面 $AEFG$ 。又 $AF \subset$ 平面 $AEFG$, 所以 $SC \perp AF$ 。作 $SO \perp$ 平面 $ABCD$, 垂足为 O , 则 $AO = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$, 则 $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\cos \alpha}$ 。

在 $\triangle SAC$ 中, $AF = \frac{SO \cdot AC}{SC} = \sqrt{\cos \alpha} \cdot 2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$,

故 $SF = \sqrt{SA^2 - AF^2} = |2\cos \alpha - 1|$, 由 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, 得

$\cos \alpha \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, 即 $SF = 2\cos \alpha - 1$, 比较图 11 和图 12, 由 $SF = SF_1$, 得 $2\cos \alpha - 1 = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, 所以 $\cos \alpha = 0$ (舍) 或

$\cos \alpha = 1$ (舍)。

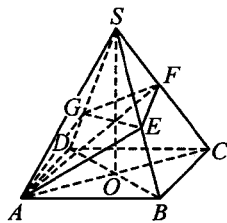


图 12

因此, 四边形 $AEFG$ 的周长取最小值时, 点 A, E, F, G 不共面。

教师点评: 当四边形 $AEFG$ 的周长最小时, 该四边形 $AEFG$ 为空间四边形。即若四边形 $AEFG$ 为平面四边形时, 无法取到最小值 $4\sqrt{3}$ 。那它的最小值又是多少? 即已知正四棱锥 $S-ABCD$ 侧棱长为 4, $\angle ASB=30^\circ$, 过点 A 作截面与侧棱 SB, SC, SD 分别交于 E, F, G , 求截面 $AEFG$ 的周长的最小值。感兴趣的读者可尝试深入研究。

2 教学思考

本节课中心明确、主题鲜明, 即以空间几何体的截面为主线, 研究空间几何体的位置关系、性质及度量。其中例 5 从四边形 $AEFG$ 的周长的最小值出发研究 A, E, F, G 四点是否共面, 进而探究截面四边形 $AEFG$ 的周长的最小值。

2.1 变式教学 变出精彩

变式教学, 通过改变问题的非本质属性进一步达成对数学本质的理解, 促使学生在对比辨析中增强思维的逻辑性和严谨性, 培养多角度思维的灵活性和发散性, 是帮助学生理解数学本质的重要途径。通过变式, 问题由简单到复杂, 使学生的认识从肤浅到深入, 从现象到本质。如例 1 中若直接证明平面 $D_1AC \parallel$ 平面 EFG , 试题的难度就大大降低。若 (已知平面 $D_1AC \parallel$ 平面 EFG) 利用平行平面的性质就容易得到截面 $EFHG IJ$ 。考虑到学生基础较好, 授课教师 A 安排的试题的起点稍高。以例 1 的形式安排是适当的, 教师的追问还原了学生的思维过程, 促进学生理性思维的发展。例 3 与例 4 均为空间几何体的截面四边形的周长问题, 但两类问题的条件不尽相同, 导致问题解决的方式迥异。

2.2 适当延拓 指明方向

数学教学本质上是培养人的思维能力, 学生运用学到的数学知识去认识世界是我们的教育价值所在。因此, 教师在课堂上把握教育时机与学生一起发现与

提出问题、分析与解决问题是数学教学的重要方面。对于截面,高考一般只涉及正方体等简单几何体的特殊截面,而授课教师A在例4与例5的总结中分别提出了自己没有解决的问题,是锦上添花还是画蛇添足?学科组部分教师认为探究高考未必考查的内容不仅浪费学生的时间,还给自己带来麻烦(加重教师研究的负担)。也有部分教师认为教师的教学要立足高考,但不应止于高考,还要着眼于学生的未来发展。目前,多数教师唯高考分数为指挥棒,对于学生在高考中得分较低的问题甚至抛开不讲。笔者认为,教师向学生展示真实的探究过程与结果,引领学生经历问题的发现、提出、思考、(没有或部分)解决的过程是十分珍贵的,让学生明确探究的方式方法,提升学生的学习信心。如通过上述问题的提出,可以强化学生对元素是否共面的探究意识,同时尚未解决的问题更能激发学生的好奇心,在他们心中种下探究的种子。

对于某个阶段的特定内容,教学目标相对固定,但教师教学时应根据学情对阶段性教学目标进行适当调整。例2通过对空间几何体的模型化(标准化)处理,产生认知冲突,进而对矛盾的根源进行追踪。引领学生了解凸多面体与凹多面体的区别,初步认识错解的缘由。通过分析与辨析,揭示出求空间几何体的体积问题的一般方法,使学生强化等价转化的意识和提高等价转化的能力。由于前4道例题截面背景的铺垫,例5中探寻四边形AEFG是否共面水到渠成。授课教师A根据几何体的展开与折叠前后各几何量的关系构造方程进行求解,后续还可利用坐标法进行判定。

2.3 直觉先行 逻辑跟进

数学家庞加莱说过:“逻辑用于论证,直觉用于发明”。这对于数学创造活动中直觉思维的作用的论述是十分精辟的。所以必须运用发展的目光看待直觉思维,转变观念、提高认识是培养直觉思维的前提。解题中的“错误”不一定是坏事,关键是看如何转化,将不利变为有利,即将“错误”作为宝贵的资源。例2能很好地提高学生的质疑精神与能力,让学生更加关注结论成立的先决条件,培养学生遵循规则的意识。如何理解试题中的“如图所示”?即怎样理解配图中的各对象内部及相互之间的位置关系?无论如何都要通过文字或符号语言加以说明,进而规避解题者主观理解上的差异,实现命题者与解题者认识上的统一^[1]。

2.4 重视实物 善用技术

教师能够处理一些相对复杂的空间几何体的问题,除与教师对相关知识理解的整体性与系统性及丰富的解题经验之外,更是由教师具有较高的空间想象能力所决定。如何培养学生的空间想象能力?笔者认为数学教学要加强实物模型与教具的使用,让学生看一看、摸一摸、做一做,一次实践操作可能好过多次说教,使认识从具体到抽象,同时强化必要的信息技术手段,通过动画演示等手段化抽象为直观。如对复杂的空间几何体可通过(3D技术打印)实物展示,然后让学生离开实物去想象该几何体的形状。目前多数数学教师只是了解普适信息技术,而对教学中常用的信息技术及专题教学活动所需要的信息技术则没有掌握,而相关的网络资源也相对稀缺。

在教学中运用现代技术时,既要考虑数学内容的特点,又要考虑信息技术的特点与局限性,把握好两者的有机结合,利用计算器和计算机的优势,确实对学生的学习和教师的教学起到促进作用,这是一个基本原则。当我们鼓励学生运用现代技术学习数学时,应让他们认识到现代信息技术的飞速发展方便了数学教学,为教与学注入了新的活力。但是,现代信息技术不能替代艰苦的学习和人脑缜密的思考,它只是作为达到目的的一种手段、一种重要的工具,要合理而非盲目地使用信息技术^[2]。

2.5 构建整体 规范表达

高三第一轮复习的基本任务是夯实基础、构建联系。数学是一个有机的整体。教材编者基于学情将数学知识模块化、主题化,教师教学应抓住教学主线,分阶段将知识逐步教授。教学中以旧迎新、逐步深化,进而触类旁通,构建数学整体。学生要想形成网络结构,构建知识整体,要深刻理解每部分内容,规范表达,避免对问题似是而非的认识,还要多角度全方位地理解教材,在处理综合问题不至于思维断线。教学应以学生的认知发展水平和已有的经验为基础,严谨地思维,规范地书写。

参考文献:

- [1] 郑良. 问诊试题失误,提升命题水平[J]. 中学数学(上半月). 2021(6):10-12.
- [2] 王尚志,吕世虎,胡凤娟. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)教师指导·数学[M]. 上海:上海教育出版社,2020.