

高三应用题复习感悟

——以高三一轮复习“函数模型及应用”教学为例

■ 殷 乐

一、教学设计

高考中的六道解答题中必有一道应用题,翻阅苏教版教材和2016届江苏高考数学的考试说明,函数模型及其应用是B级要求,但学生在中学阶段应用题似乎已成为一种“学生怕做,老师怕教”的“恐怖性”问题。于是准备将本节课的题目设为“函数模型即应用”,任何应用解答题只有确定变量,找到等量关系,进行了合理的转化才能有精确的计算,故探讨这一问题,显得很有意义。

1. 典型例题展开课题

例1 如图,经过村庄A有两条夹角为 60° 的公路AB,AC,根据规划拟在两条公路之间的区域内建一工厂P,分别在两条公路边上建两个仓库M、N(异于村庄A),要求 $PM=PN=MN=2$ (单位:千米)。如何设计,使得工厂产生的噪声对居民的影响最小(即工厂与村庄的距离最远)。

本题设计思路清晰,题目简洁明了,解题策略丰富多样,根据学生对问题变量的不同选择方式,本题给出如下三种解题策略。

策略一 设 $\angle AMN=\theta$,在 $\triangle AMN$ 中,

$$\frac{MN}{\sin 60^\circ} = \frac{AM}{\sin(120^\circ - \theta)}.$$

因为 $MN=2$,所以 $AM = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin(120^\circ - \theta)$.

在 $\triangle APM$ 中,

$$\cos \angle AMP = \cos(60^\circ + \theta).$$

$$AP^2 = AM^2 + MP^2$$

$$- 2AM \cdot MP$$

$$\cdot \cos \angle AMP$$

$$= \frac{16}{3} \sin^2(120^\circ - \theta) + 4 - 2 \times 2 \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin$$

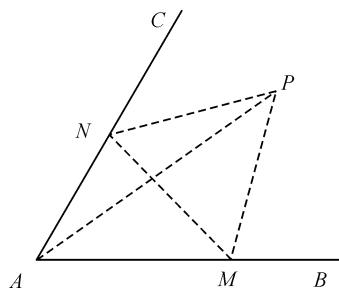
$$(120^\circ - \theta) \cos(60^\circ + \theta)$$

$$= \frac{16}{3} \sin^2(\theta + 60^\circ) - \frac{16\sqrt{3}}{3} \sin(\theta + 60^\circ)$$

$$\cos(\theta + 60^\circ) + 4$$

$$= \frac{8}{3} [1 - \cos(2\theta + 120^\circ)] - \frac{8\sqrt{3}}{3} \sin(2\theta$$

$$+ 120^\circ) + 4$$



$$= -\frac{8}{3} [\sqrt{3} \sin(2\theta + 120^\circ) + \cos(2\theta + 120^\circ)] + \frac{20}{3}$$

$$= \frac{20}{3} - \frac{16}{3} \sin(2\theta + 150^\circ), \theta \in (0, 120^\circ).$$

当且仅当 $2\theta + 150^\circ = 270^\circ$, 即 $\theta = 60^\circ$ 时, AP^2 取得最大值 12, 即 AP 取得最大值 $2\sqrt{3}$.

答: 设计 $\angle AMN$ 为 60° 时, 工厂产生的噪声对居民的影响最小。

策略二 (构造直角三角形):

设

$$\angle PMD = \theta,$$

在

$\triangle PMD$ 中,

$$\because PM =$$

$$2, \therefore PD =$$

$$2\sin\theta, \quad MD$$

$$= 2\cos\theta.$$

在 $\triangle AMN$ 中, $\angle ANM = \angle PMD = \theta, \therefore$

$$\frac{MN}{\sin 60^\circ} = \frac{AM}{\sin \theta},$$

$$AM = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin\theta, \therefore AD = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin\theta +$$

$2\cos\theta, (\theta \geq \frac{\pi}{2} \text{ 时, 结论也正确}).$

$$AP^2 = AD^2 + PD^2 = (\frac{4\sqrt{3}}{3} \sin\theta + 2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta)^2$$

$$= \frac{16}{3} \sin^2\theta + \frac{8\sqrt{3}}{3} \sin\theta \cos\theta + 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta$$

$$= \frac{16}{3} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin 2\theta + 4 =$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \sin 2\theta - \frac{8}{3} \cos 2\theta + \frac{20}{3}$$

$$= \frac{20}{3} + \frac{16}{3} \sin(2\theta - \frac{\pi}{6}), \theta \in (0, \frac{2\pi}{3}).$$

当且仅当 $2\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时,

AP^2 取得最大值 12, 即 AP 取得最大值 $2\sqrt{3}$.

此时 $AM = AN = 2, \angle PAB = 30^\circ$.

策略三 设 $AM = x, AN = y, \angle AMN$

$= \alpha$.

在 $\triangle AMN$ 中, 因为 $MN = 2, \angle MAN = 60^\circ$,

所以 $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \angle MAN$,

$$\text{即 } x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ = x^2 + y^2 - xy = 4.$$

$$\text{因为 } \frac{MN}{\sin 60^\circ} = \frac{AN}{\sin \alpha}, \text{ 即 } \frac{2}{\sin 60^\circ} = \frac{y}{\sin \alpha},$$

$$\text{所以 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} y, \cos \alpha = \frac{x^2 + 4 - y^2}{2 \times 2 \times x} =$$

$$\frac{x^2 + (x^2 - xy)}{4x} = \frac{2x - y}{4}.$$

$$\cos \angle AMP = \cos(\alpha + 60^\circ) = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - y}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} y = \frac{x - 2y}{4}.$$

在 $\triangle AMP$ 中, $AP^2 = AM^2 + PM^2 - 2AM \cdot PM \cdot \cos \angle AMP$,

$$\text{即 } AP^2 = x^2 + 4 - 2 \times 2 \times x \times \frac{x - 2y}{4} =$$

$$x^2 + 4 - x(x - 2y) = 4 + 2xy.$$

因为 $x^2 + y^2 - xy = 4, 4 + xy = x^2 + y^2 \geq 2xy$, 即 $xy \leq 4$.

所以 $AP^2 \leq 12$, 即 $AP \leq 2\sqrt{3}$.

当且仅当 $x = y = 2$ 时, AP 取得最大值 $2\sqrt{3}$.

答: 设计 $AM = AN = 2 \text{ km}$ 时, 工厂产生的噪声对居民的影响最小。

从课堂的教学情况来看, 课前准备的三种解法是学生上课时依次想到的。通过这道例题的分析, 告诉学生: 应用题的关键是一重在审题, 身临其境, 细细品味; 二要抓关键——确定自变量, 破难点——找出等量关系。

2. 经典练习深化课题

正当学生的思维处于最活跃的兴奋点

时,给出下一个例题,让学生体会应用题抓重点、破难点。

【练习】在边长为 10 的正三角形纸片 ABC 的边 AB 、 AC 上分别取 D 、 E 两点,使沿线段 DE 折叠三角形纸片后,顶点 A 正好落在边 BC 上(设为 P),在这种情况下,求 AD 的最小值。

本题可以视为例 1 的变式。学生在解答过程中可以参考例 1 的思考方法,本题给出如下两种解题策略。

策略 1 显然 A 、 P 两点关于折线 DE 对称,连接 DP

设 $\angle BAP = \theta$, $\angle BDP = 2\theta$. 再设 $AD = x$, 所以 $DP = x$, $DB = 10 - x$.

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle APB = 180^\circ - \angle ABP - \angle BAP = 120^\circ - \theta$.

在 $\triangle BDP$ 中,由正弦定理知 $\frac{BD}{\sin \angle BDP} = \frac{DP}{\sin \angle DBP}$, 即 $\frac{10-x}{\sin(120^\circ-2\theta)} = \frac{x}{\sin 60^\circ}$.

所以 $x = \frac{10\sqrt{3}}{2\sin(120^\circ-2\theta)+\sqrt{3}}$. 因为 $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$, 所以 $0^\circ \leq 120^\circ - 2\theta \leq 120^\circ$,

所以当 $120^\circ - 2\theta = 90^\circ$, 即 $\theta = 15^\circ$ 时, $\sin(120^\circ - 2\theta) = 1$. 此时 x 取得最小值 $\frac{10\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 20\sqrt{3} - 30$, 且 $\angle ADE = 75^\circ$. 所以

AD 的最小值为 $20\sqrt{3} - 30$.

策略 2 设 $AD = y$, $BP = x$, 所以 $BD = 10 - y$, $DP = x$ ($0 < x < 10$),

$\triangle BDP$ 中, $DP^2 = BD^2 + BP^2 - 2BD \cdot BP \cdot \cos \frac{\pi}{3}$,

即 $y^2 = (10-y)^2 + x^2 - 2(10-y)x \cdot \frac{1}{2}$,

所以 $y = \frac{x^2 - 10x + 100}{20 - x}$,

令 $20 - x = t \in (10, 20)$, $x = 20 - t$, $y = \frac{(20-t)^2 - 10(20-t) + 100}{t} =$

$$\frac{t^2 - 30t + 300}{t}$$

$$t + \frac{300}{t} - 30 \geq 20\sqrt{3} - 30 \text{ (当且仅当 } t =$$

$10\sqrt{3}$, 即 $x = 20 - 10\sqrt{3}$ 取等号)。

所以 AD 的最小值为 $20\sqrt{3} - 30$.

3. 探究发现拓展课题

高中数学学习不仅是学习知识,还应培养自身的解题能力。我顺势给出近去年高考例题供学生课后反思。

【题目】某山区外围有两条相互垂直的直线型公路,为进一步改善山区的交通现状,计划修建一条连接两条公路的山区边界的直线型公路,记两条相互垂直的公路为 l_1, l_2 , 山区边界曲线为 C , 计划修建的公路为 l , M, N 为 C 的两个端点,测得点 M 到 l_1, l_2 的距离分别为 5 千米和 40 千米,点 N 到 l_1, l_2 的距离分别为 20 千米和 2.5 千米,以 l_1, l_2 所在的直线分别为 x, y 轴,建立平面直角坐标系 xOy , 假设曲线 C 符合函数 $y = \frac{a}{x^2 + b}$ (其中 a, b 为常数)模型。

(1)求 a, b 的值;

(2)设公路 l 与曲线 C 相切于 P 点, P 的横坐标为 t 。

①请写出公路 l 长度的函数解析式 $f(t)$, 并写出其定义域;

②当 t 为何值时,公路 l 的长度最短? 求出最短长度。

二、点滴感悟

1. 应用题复习什么

应用题在以往历年高考中是“难题”,是学生心中的“一根刺”。应用题在以往历年高考中是“可怕题”,是学生心中“永远的痛”。

2011 年 包装盒测量问题

2012 年 炮弹射程问题

2013 年 测量行程问题

2014 年 解三角形的测量问题

2015 年 函数图像的切线问题

这五年高考应用题,无一例外都给出了示意图,使题意变得更加明确、直观,也降低了思维的强度。尤其这两年的高考中几乎所有应用题都直接给出变量,不需自己引入变量,减少了学生的思考时间,明确了解题的方向,有利于解答的一致性。

随着新课改的推进及高考模式的发展变化,无论从涉及的知识还是方法上讲,应用题教学和考试的重点都发生了变化,原来概率、数列、线性规划等方面的应用题逐渐淡出高考,取而代之的是导数、分段函数等新兴力量。在复习中正确分清这些主次重点,关注典型包含常考知识和重要方法的应用题。在复习过程中要努力帮助学生克服心理障碍,分析清楚每一道应用题的变量,找出等量关系,从这两个方面帮助学生突破难点。

2. 应用题复习课怎么上

经过这次课堂教学活动,认为要上好一节应用题复习课,需从以下几个方面重点入手:(1)精选例题。40 分钟的课堂非常珍贵,要在有限的课堂教给学生更多的知识,一道典型的例题必不可少,例题必须具备“开放性”,学生无论是什么样的方法都能解决问题就是一道好的例题。(2)留有思考的时间和空间。我们老师往往一堂课过后总说来不

及,其实一节完整的课并不代表要把所有的预设的问题全部解决。课堂上留有足够的时间给学生说出自己的解题思路,比老师的提醒珍贵得多。还可以将课堂内容适当延伸到课外,给学生留有思考的空间。(3)留有总结的时间。很多时候,不在于老师教了多少知识,而是我们学生自己总结吸收了多少。学校的课程排得满满的,我们的学生根本没有时间回过头来总结反思,我们何不将这个环节留在一节课结束前 3 分钟,把总结的时间交给学生,让学生自己谈一谈一节课收获。

参考文献:

- [1]邓小荣. 高中数学的体验教学法[J]. 广西师范学院学报,2003(08).
[2]黄红. 浅谈高中数学概念的教学方法[J]. 广西右江民族师专学报,2003(06).
[3]胡中双. 浅谈高中数学教学中创造性思维能力的培养[J]. 湖南教育学院学报,2001(07).
[4]竺仕芳. 激发兴趣,走出误区——综合高中数学教学探索[J]. 宁波教育学院学报,2003(04).

(作者单位:江苏省无锡第一女子中学)

