指向直观想象素养阶段性评价的区域备考探索

——以高考复习阶段中的立体几何题为例

湖北 周 威

1 基于立体几何命题，聚焦直观想象素养阶段性评价

直观想象是数学学科核心素养之一，《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称课标)对直观想象素养的描述为借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化，利用空间形式特别是图形，理解和解决数学问题的素养.课标指出，数学学科核心素养的发展具有连续性和阶段性.因此，高考复习备考需要关注核心素养的阶段性发展和评价.在高考和各种模拟考试中，学生直观想象素养的阶段性评价可以从立体几何试题的命题设计、考试结果以及问题的变式或一题多解等方面来体现，那么如何来呈现这种阶段性发展和阶段性评价呢？笔者以为，可以以高三复习备考中的一、二轮复习阶段作为研究对象，分别以两阶段复习中的两次区域联考作为监测工具，首先从高考命题规律中把握必备知识、关键能力的考查要求；其次是确定学生的一轮复习阶段现有水平以及经过一轮复习后学生可能达到的发展水平；最后是通过同类型必备知识的问题变式或一题多解，提升学生不同复习阶段的直观想象素养水平.因此，笔者接下来将从这一角度阐述直观想象素养在一、二轮复习备考阶段的发展和评价.

统计近几年立体几何大题考点不难发现，高考中的立体几何解答题以学生所熟知的空间几何体为载体，采用“证明＋计算”的设问方式(即第(1)问主要考查点、线、面位置关系的证明，第(2)问考查空间角、体积的计算)，突出基础知识，注重数形结合、化归与转化等数学思想方法，对培养学生直观想象素养有积极意义.因此，对于本届高三的学生，两次区域联考立体几何题都定位于19题位置，必备知识和关键能力可设置如下表，并都确定为数学探究问题.

表1 两次区域联考立体几何题双向细目表

题号	问题情境	必备知识	评价要求			主要思想方法	关键能力						主要体现核心素养	所属类型
			了解	理解	掌握		空间想象	抽象概括	推理论证	运算求解	数据分析处理	应用与创新意识		
19	数学探究问题	立体几何线面垂直、平行，二面角余弦值			√	数形结合、化归与转化	√		√	√		√	直观想象、数学运算、逻辑推理	综合

2 基于四棱锥模型，体现两轮复习阶段直观想象水平

四棱锥模型是高考中的常规模型，一般考查其底面为平行四边形或为梯形的情形.因此，第一轮复习阶段的区域联考立体几何题可以将四棱锥模型底面设置为梯形，第一问考查线面垂直的证明方法，定位基础题；第二问考查是否存在点使得面面垂直的数学探究问题，定位常规而又不乏味的中档题.第二轮复习阶段的区域联考可以将底面设置为平行四边形，第一问考查面面垂直的证明方法，同样定位基础题；第二问考查面与面不垂直的情形下，已知二面角寻找点的位置的数学探究问题.因此，两次区域联考命题意图类似、考点类似、证明或计算方法类似，可以更好地反映出学生两轮复习阶段的实际水平.

2.1 一轮复习阶段学生直观想象水平描述

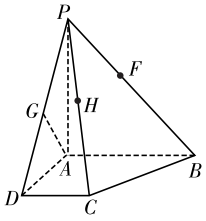
【例1】(恩施州2022届高三第一次质检·19)如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$AB/\!/CD$，$AB=AD=PA=2CD=4$，G 为 PD 的中点.

(1)求证：$AG\perp$ 平面 PCD；

(2)若点 F 为 PB 的中点，线段 PC 上是否存在一点 H，使得平面 $GHF\perp$ 平面 PCD？若存在，请确定 H 的位置；若不存在，请说明理由.

【钟家庆数学奖获得者】 王跃飞：复动力系统，Klein群，复域微分方程理论，值分布理论.在国际重要学术刊物“Arkiv Mate.”，“Archiv Math.”，“J. D'Analyse Math.”，“Israel J. Math.”，“Tohoku Math. J.”，“中国科学”等发表论文四十余篇.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net



解:(1)证明:因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,$AB\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AB$.

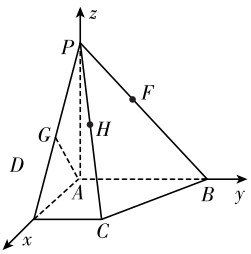
又 $AD\perp AB$,$DA\cap PA=A$,所以 $AB\perp$ 平面 PAD,

又 $AB/\!/CD$,所以 $CD\perp$ 平面 PAD.

又 $AG\subset$ 平面 PAD,所以 $CD\perp AG$.

又 $PA=AD$,G 为 PD 的中点,所以 $AG\perp PD$,$PD\cap DC=D$,所以 $AG\perp$ 平面 PCD.

(2)以 A 为坐标原点,AD,AB,AP 所在直线建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0)$,$C(4,2,0)$,$P(0,0,4)$,$F(0,2,2)$,$G(2,0,2)$,

则$\overrightarrow{PC}=(4,2,-4)$,$\overrightarrow{FG}=(2,-2,0)$.

设存在点 H,满足$\overrightarrow{PH}=k\overrightarrow{PC}(0\leqslant k\leqslant 1)$,

所以$\overrightarrow{PH}=(4k,2k,-4k)$,点 H 坐标为$(4k,2k,-4k+4)$,则$\overrightarrow{GH}=(4k-2,2k,-4k+2)$.

设平面 GHF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{GH}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FG}=0$,

即$\begin{cases}(4k-2)x+2ky+(-4k+2)z=0,\\2x-2y=0,\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}=(2k-1,2k-1,3k-1)$,

由(1)可知$\overrightarrow{AG}=(2,0,2)$为平面 PCD 的一个法向量,若平面 $GHF\perp$ 平面 PCD,则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AG}=0$,解得 $k=\frac{2}{5}$,即 $PH=\frac{2}{5}PC$ 时,平面 $GHF\perp$ 平面 PCD.

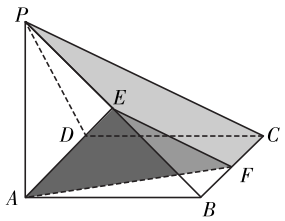
水平描述:此题均分 3.9 分,难度系数 0.33,区分度 0.74.从难度系数看,是属于中档偏难题.学生答题主要是通过向量坐标法.课标对"立体几何"部分的学业要求为:能够运用图形的概念描述图形的基本关系和基本结果.能够证明简单的几何命题(平行、垂直的性质定理),并会进行简单应用.与学业要求对比,出现的问题如下:首先,学生不能用符号语言准确表达线线关系、线面关系及面面关系;其次,应用中学生解决问题方法单一,计算能力较差,解决实际问题能力不足.因此,在以后的复习中注重符号语言的表达、书写规范,要注重引导学生一题多解,从不同的角度分析问题,加强对学生"解决数学问题"能力的培养.

2.2 二轮复习阶段学生直观想象水平描述

【例 2】(恩施州 2022 届高三第二次质检·19)如图所示,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形,$PA\perp$ 底面 $ABCD$,$PA=AB$,两点 E,F 分别为线段 PB,BC 上的动点.

(1)若 E 为线段 PB 的中点,求证:平面 $AEF\perp$ 平面 PBC;

(2)若 $BE=\sqrt{2}BF$,且平面 AEF 与平面 PBC 的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{14}$,试确定点 F 的位置.



解:(1)证明:由 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,$BC\subset$ 平面 ABC,可得 $PA\perp BC$.又在正方形 $ABCD$ 中,$BC\perp AB$,且 $PA\cap AB=A$,则 $BC\perp$ 平面 PAB.又 $AE\subset$ 平面 PAB,有 $BC\perp AE$.

由 $PA=AB$,E 为 PB 中点,可得 $AE\perp PB$.

又 $PB\cap BC=B$,则 $AE\perp$ 平面 PBC.又 $AE\subset$ 平面 AEF,从而平面 $AEF\perp$ 平面 PBC.

(2)如图所示,以 A 为坐标原点,AB,AD,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $AB=1$,则 $A(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C(1,1,0)$,$D(0,1,0)$,$P(0,0,1)$,则$\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{BP}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$.

由(1)可知 $\boldsymbol{m}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ 为平面 PBC 的一个法向量.

由 $BE=\sqrt{2}BF$,$PB=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}BC$,可知 $EF/\!/PC$.

设$\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$,$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BP}$,

则$\overrightarrow{BF}=\lambda(0,1,0)$,$\overrightarrow{BE}=\lambda(-1,0,1)$,

可得$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=(1,\lambda,0)$,$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=(1-\lambda,0,\lambda)$.

设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+\lambda y=0,\\(1-\lambda)x+\lambda z=0,\end{cases}$

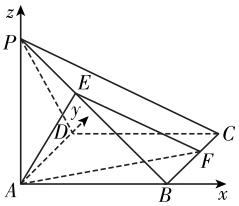
取 $y=1$,则 $x=-\lambda$,$z=1-\lambda$,即 $\boldsymbol{n}=(-\lambda,1,1-\lambda)$.

从而,由$|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|2\lambda-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+2}}=$

【钟家庆数学奖获得者】 王风雨:工作涉及概率论、微分几何、统计物理和泛函分析等多个学科领域,已发表近 80 篇论文和一部专著,其中一些成果受到国际同行广泛引用.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\frac{\sqrt{7}}{14}$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=\frac{2}{3}$，即 F 为 BC 的三分点.



水平描述：此题区域均分 4.9 分，难度系数 0.41，区分度 0.7. 从难度系数看，对于区域内学生来说，依然属于中档偏难题，第一问“几何关系的证明”得分得到了提升，这说明一定程度上，学生对“几何直观和空间想象感知事物的形态与变化”理解增强，然而对比课标“学业要求”，出现的问题依然有：学生对垂直部分的判定定理和性质定理的转化能力弱、长度关系的符号语言与点线面位置关系的图形语言转化能力不够；第二问大部分学生都基本能采用向量坐标方法建立空间直角坐标系，运用合适的向量模型，将相对困难的逻辑推理问题转化为向量运算来解决，直观想象素养得到了提升，但依然计算能力差. 这也说明直观想象素养并不是孤立的，直观想象素养的提升与逻辑推理、数学运算等素养密切相关.

与学生一轮复习阶段直观想象水平比较，区域均分有小幅度提升，针对历年高考得分情况，进步是明显的. 出现的问题依然是数学符号语言的描述不够严谨和准确；在数学运算方面，计算能力依然较差. 这说明，在学生直观想象水平发展的过程中，不仅要关注学生对知识技能掌握的程度，还要更多地关注学生的思维过程，判断学生是否会用数学的眼光观察世界，是否会用数学的思维思考世界，是否会用数学的语言表达世界. 因此，以后的立体几何复习阶段，要加强将数学语言表达能力提升和数学运算能力提升融入到不同的解题策略当中.

2.3 从不同解题策略提升直观想象素养

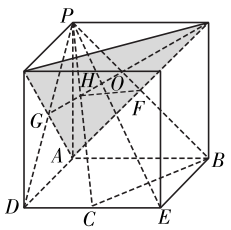
立体几何中常见的解法包括空间向量坐标法、基向量法、几何法、补形法（融入立体几何模型）、投影面积法等，除了空间向量坐标法，其他解法也能很好地考查空间想象能力，提升理性思维能力，这就是“一题多解”的好处. 因此，解法的多样性十分有助于提升学生直观想象水平，既能展现学生数学学习过程中思维品质的形成过程，又体现了学生在具体的问题情境中，结合个人实际、灵活选择方法、应用数学能力的过程.

【例 1】解法 2（基向量法）：以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\}$ 为一组基向量，有 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}$.

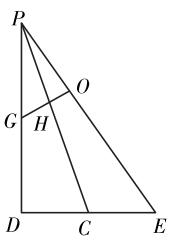
设 $\overrightarrow{PH}=t\overrightarrow{PC}$，则 $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AP}+t\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}t\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}+(1-t)\overrightarrow{AP}$. 当 A,G,F,H 四点共面时，存在实数 λ,μ，使得 $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AG}+\mu\overrightarrow{AF}$，即 $\frac{1}{2}t\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}+(1-t)\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\mu\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AD}+\left(\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu\right)\overrightarrow{AP}$，

可得 $\begin{cases}\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}\mu,\\ t=\frac{1}{2}\lambda,\\ 1-t=\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu,\end{cases}$ 解得 $t=\frac{2}{5}$，即 H 在线段 PC 的 $\frac{2}{5}$ 处.

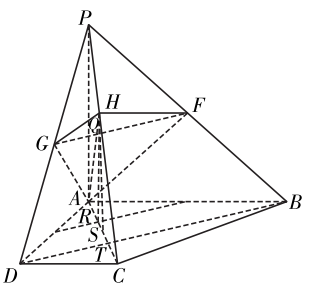
【例 1】解法 3（补形法）：如图所示，将四棱锥补形成立方体，易知垂面 $AGHF$ 与对角线 PE 相交于点 O，且 $PO=\frac{1}{3}PE$，三点 G,H,O 在平面 GHF 与平面 PCD 的交线上.



如图所示，线段 PC 为 $\mathrm{Rt}\triangle PDE$ 的中线，点 G 为 PD 的中点，点 O 为 PE 的三分点，则 $\overrightarrow{PH}=t\overrightarrow{PC}=t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{PD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PE}\right)=t\overrightarrow{PG}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{PO}$. 由 G,H,O 三点共线，可得 $t+\frac{3}{2}t=1$，解得 $t=\frac{2}{5}$，即 H 在线段 PC 的 $\frac{2}{5}$ 处.



【例 1】解法 4（几何法）：如图，当 A,G,F,H 四点共面时，AH 与 GF 相交点 Q，连接 AC，作 $QR\perp AC$ 于点 R，$HS\perp AC$ 于点 S. 易知 R 为线段 AC 的三分点，即 $AR=\frac{1}{3}AC=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，$QR=\frac{1}{2}PA=2$.



【钟家庆数学奖获得者】 刘春根：主要从事大尺度共轭体系的多体半经验算法，以及可运用于准二维共轭体系的密度矩阵重整化群（DMRG）的新型计算方法的研究.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

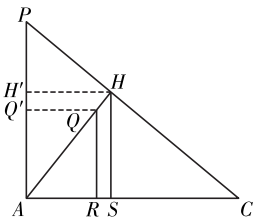
如图，作 $HH'\perp PA$ 于点 H'，$QQ'\perp PA$ 于点 Q'.

设 $HH'=x$，由 $\frac{HS}{AS}=\frac{QR}{AR}$，解得 $HS=\frac{QR}{AR}\cdot AS=\frac{3x}{\sqrt{5}}$.

又 $SC=AC-AS=2\sqrt{5}-x$，

由 $\frac{HS}{PA}=\frac{CS}{CA}$，得 $\frac{\frac{3x}{\sqrt{5}}}{4}=\frac{2\sqrt{5}-x}{2\sqrt{5}}$，解得 $x=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

故 $\frac{PH}{PC}=\frac{HH'}{AC}=\frac{2}{5}$，即 H 在线段 PC 的 $\frac{2}{5}$ 处.



【例 2】解法 2（几何法）：设 M 为 PB 的中点，如图所示，当 E 在线段 PM 上时，过 PB 的中点 M 作 $MH\perp EF$，连接 AH. 易知 $AM\perp$ 平面 PBC，$EF\subset$ 平面 PBC，可得 $AM\perp EF$. 又 $MH\cap AM=M$，则 $EF\perp$ 平面 AMH，从而可知 $\angle AHM$ 为平面 AEF 与平面 PBC 所成夹角.

设 $AB=1$，$BF=\lambda BC=\lambda$，则 $BE=\sqrt{2}\lambda$，$EF=\sqrt{3}\lambda$.

由 $\triangle EHM\backsim\triangle EBF$，可得 $\frac{EM}{EF}=\frac{EH}{EB}=\frac{HM}{BF}$，

即 $\frac{\sqrt{2}\lambda-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}\lambda}=\frac{EH}{\sqrt{2}\lambda}=\frac{HM}{\lambda}$，

解得 $EH=\frac{2\lambda-1}{\sqrt{3}}$，$HM=\frac{\sqrt{2}\lambda-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}}$，

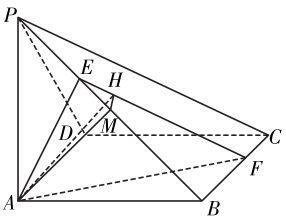
则 $AE=\sqrt{AM^2+EM^2}=\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+1}$，

$AH=\sqrt{AE^2-EH^2}=\sqrt{\frac{2\lambda^2-2\lambda+2}{3}}$.

在 Rt$\triangle AMH$ 中，由（余弦定理或）三角函数定义求得 $\cos\angle AHM=\frac{2\lambda-1}{2\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}$，再由 $\frac{2\lambda-1}{2\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$，

解得 $\lambda=\frac{2}{3}$. 当 E 在线段 BM 上时，同理可求得 $\lambda=\frac{1}{3}$.

综上，可知 F 为 BC 的三分点.



【例 2】解法 3（投影面积法）：设 M 为 PB 的中点，如图所示，当 E 在线段 PM 上时，连接 AM 与 MF，易知 $AM\perp$ 平面 PBC，可得 $\triangle MEF$ 为 $\triangle AEF$ 在平面 PBC 中的投影.

设 $AB=1$，$BF=\lambda BC=\lambda$.

在 $\triangle AEF$ 中，

$\cos\angle AFE=\frac{AF^2+EF^2-AE^2}{2AF\cdot EF}=\frac{\lambda+1}{\sqrt{3(1+\lambda^2)}}$，

则 $\sin\angle AFE=\sqrt{1-\cos^2\angle AFE}=\sqrt{\frac{2(\lambda^2-\lambda+1)}{3(1+\lambda^2)}}$，

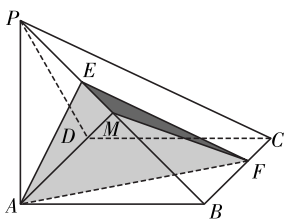
可得 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}EF\cdot AF\cdot\sin\angle AFE=\frac{\lambda\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}{\sqrt{2}}$；

在 $\triangle MEF$ 中，同理可得 $S_{\triangle MEF}=\frac{\lambda(2\lambda-1)}{2\sqrt{2}}$.

设 θ 为平面 AEF 与平面 PBC 的夹角，

则 $\cos\theta=\frac{S_{\triangle MEF}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{2\lambda-1}{2\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$，

解得 $\lambda=\frac{2}{3}$.



当 E 在线段 BM 上时，同理可求得 $\lambda=\frac{1}{3}$. 综上，可知 F 为 BC 的三分点.

3 结语

基于区域立体几何命题实践，适时对学生直观想象素养水平进行阶段性评价与反馈，这对复习备考效率地提升是十分明显的. 实际上，根据前文一、二轮复习阶段对学生直观想象素养水平表现情况的探究，可以发现学生很少进行有效的“假设－演绎”推理活动，推理能力未能得到有效的发展，其直接结果就是导致数学符号语言的描述不够严谨、准确以及数学运算过程中的逻辑混乱，因此，立体几何复习备考时，不能仅仅关注解题均分和解题数量，要从学生最近发展区出发，整体把握一、二轮复习阶段直观想象素养水平与逻辑推理、数学运算素养的关系，注重“一题多解”引导学生从各个角度分析问题、解决问题，有针对性地提升学生的直观想象素养.

（作者单位：湖北省恩施州教育科学研究院）

【钟家庆数学奖获得者】 许学军：主要从事大规模科学计算的算法构造以及相关的理论研究，尤其是对多重网格和区域分解这两种快速算法有深入的研究.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net