错误暴露要充分　方法点拨要及时

——高三一轮复习课《导数在研究函数中的应用》教学设计及其思考

姜文成

(江苏省宝应县画川高级中学,225800)

一、设计背景

高三一轮复习一般以知识、技能、方法的逐点扫描和梳理为主,综合应用知识为辅. 因此在复习过程中要着重培养好学生处理问题的基本方法,充分暴露出学习中存在的问题. 而在每个章节结束后选用一些具有典型性的当年的高考题. 因为当年高考题具有结构严谨、形式多变、情境新颖、构思巧妙、方法灵活等特点,既能有效检测出学生基本知识和方法掌握的程度,又能吸引学生,让学生有身临其境的感受.

二、教学过程的设计

1. 揭示课题,创设探究情境

函数是中学数学的核心概念,用导数研究函数的性质这类问题是每年高考中的"常客". 假如你现在正在复习迎考,你将如何面对下面这道让无数考生败走"麦城"的题目呢?

(2009 年全国高考题) 设函数 $f(x)=x^3+3bx^2+3cx$ 有两个极值点 x_1,x_2,且 $x_1\in[-1,0]$,$x_2\in[1,2]$.

(1) 求 b,c 满足的约束条件,并在坐标平面内,画出满足这些条件的点 (b,c) 的区域;

(2) 证明: $-10\leqslant f(x_2)\leqslant-\frac{1}{2}$.

问题 1　请大家用 5 分钟的时间思考第一个问题.

设计意图　这样的叙述至少有两个好处: 一是提醒学生这类问题是重点问题,一定要学好; 二是让能做出来的学生有自豪感,进一步提高学习的信心; 让不能顺利做出来的学生也不感失望,因为那毕竟是一道"无数"考生经过全年复习都没有做出来的题目.

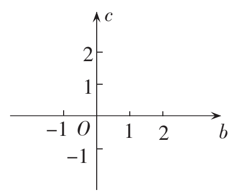

图 1

给学生 5 分钟的时间,让学生充分暴露出存在的问题. 教师通过巡视来发现存在问题. 估计学生会出现以下问题(或实物投影或课件展示):

错误 1　$f'(x)=3x^2+6bx+3c$.

$\because x_1,x_2$ 是 $f'(x)=0$ 的两个根,

$\therefore\quad x_1+x_2=-2b,x_1x_2=c$.

$$\because\begin{cases}-1\leqslant x_1\leqslant0,\\1\leqslant x_2\leqslant2,\end{cases}\qquad①$$

$$\therefore\begin{cases}-1\leqslant x_1x_2\leqslant0,\\0\leqslant x_1+x_2\leqslant2,\end{cases}\qquad②$$

$$\therefore\begin{cases}-1\leqslant c\leqslant0,\\-1\leqslant b\leqslant0.\end{cases}\qquad③$$

作出在第三象限的小正方形.

错误 2　$\because x_1,x_2$ 是 $f'(x)=0$ 的两个根,且 $x_1<x_2$,$\therefore x_1=-b-\sqrt{b^2-c}$,$x_2=-b+\sqrt{b^2-c}$,有 $\begin{cases}-1\leqslant-b-\sqrt{b^2-c}\leqslant0,\\1\leqslant-b+\sqrt{b^2-c}\leqslant2.\end{cases}$ 无法作图.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

错误 3 由 $\begin{cases} f'(-1) \geqslant 0, \\ f'(0) \leqslant 0, \\ f'(1) \leqslant 0, \\ f'(2) \geqslant 0, \end{cases}$

得
$$\begin{cases} 2b - c - 1 \leqslant 0, \\ c \leqslant 0, \\ 2b + c + 1 \leqslant 0, \\ 4b + c + 4 \geqslant 0, \end{cases} \quad ④$$

因此有 $\begin{cases} -1 \leqslant b \leqslant -\dfrac{1}{2}, \\ -2 \leqslant c \leqslant 0, \end{cases}$ ⑤

作出在第三象限的小矩形.

2. 互动交流，碰撞思维火花

整个过程大约需要 10 分钟. 可以先让学生相互讨论，充分暴露思维障碍后教师作点评分析(教师在关键处的点评是必须的，不能用个别成绩好的学生的讲解来代替)

对于错误 1，由于 ① 与 ② 之间不是等价转化，得到的 b，c 的范围显然不是所求的. 究其原因是受到利用韦达定理表示一元二次方程两根的正负的负迁移的影响，教师可举适当的反例说明.

对于错误 2，这是典型的方法的选择不确当造成的! 没有把条件和所求结论联系起来看问题，对方程根的描述只是从数的角度而没有从形的角度来认识，反映出这类学生用数形结合的思想解题的能力的不足.

对于错误 3，这类错误比较多，学生最容易搞不清楚. 教师在此让学生再次讨论. 指出，因为 ④ 和 ⑤ 之间是不等价的，当 b 取最大值 $-\dfrac{1}{2}$ 时，c 并不能取到最大值 0 或最小值 -2，所以画出来的小矩形表示的范围就不正确了，因此 ④ 实际上表示的就是 b，c 之间的约束条件. 这个问题的讲解要充分，为第二小题的求范围打好伏笔.

设计意图 新课程的重要理念之一是要求学生主动参与到教学活动中，并从中获得一些经验. 在学习过程中，每个学生都有自己的活动经验和知识积累，有自己的思维方式和解决问题的策略，每个学生的思维能力和思维水平是不同的. 学生思维水平的差异集中在对知识概念的理解和解题中对题意的分析上. 但是在实际的教学中，出于种种原因，教师不敢暴露学生的错误，只展示解题正确的思维过程，忽视教学中的“陷阱”. 给人感觉学生上课一听就懂，但真正做题时就错误不断. 因此备课时，可以适当的从错误的思路去构思，课堂上加强对典型错误的分析，充分暴露错误的思维过程，学生就能从反面吸取经验和教训，迅速从错误中走出来.

问题 2 对于第二小题，请同学们思考 2 分钟后提出解题思路.

设计意图 由于本小题实际是三次函数求值域的问题，解题的常规思路是显而易见的，具体的策略选择是如何去掉 b，c. 从时间的利用率来考虑教师可集中提出思路，不要让学生纠缠于数式的变化和字母运算等细节上(这当然是要解决的问题，但不是本课要重点解决的问题，有所失才能有所得)，集中讨论策略(1) 与策略(2) 造成的认知冲突.

大约需要 20 分钟(教师可在课前做好课件，用于投影). 可能的思路：由于结论是证明 $-10 \leqslant f(x_2) \leqslant -\dfrac{1}{2}$，不含有 b，c，而条件是 $f(x_2) = x_2^3 + 3bx_2^2 + 3cx_2$，其中 b，c，x_2 都有各自的取值范围，因此如何一个个去掉 b，c 就是解题的选择方向. 注意到 $f'(x_2) = 0$ 有 $x_2^2 + 2bx_2 + c = 0$，可有以下策略.

策略 1 以 b 换 c. $f(x_2) = x_2^3 + 3bx_2^2 + 3cx_2$，$\because x_2^2 + 2bx_2 + c = 0$，从而有
$$x_2^3 + 2bx_2^2 + cx_2 = 0,$$
即
$$3bx_2^2 = -\frac{3}{2}x_2^3 - \frac{3}{2}cx_2.$$

代入上式，并消去 b 得 $f(x_2) = -\dfrac{1}{2}x_2^3 + \dfrac{3c}{2}x_2$，由 $-2 \leqslant c \leqslant 0$，$1 \leqslant x_2 \leqslant 2$，可得 $f'(x_2) < 0$，从而 $f(x_2)$ 为 $[1,2]$ 上的减函数，$\therefore -4 + 3c = f(2) \leqslant f(x_2) \leqslant f(1) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}c$，由 -2

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\leqslant c \leqslant 0$ 可知 $-4+3c$ 的最小值是 -10，$-\frac{1}{2}+\frac{3c}{2}$ 的最大值是 $-\frac{1}{2}$，从而 $-10 \leqslant f(x_2) \leqslant -\frac{1}{2}$.

策略 2　以 c 换 b. $f(x_2)=x_2^3+3bx_2^2+3cx_2$，仿策略 1，可得 $f(x_2)=-2x_2^3-3bx_2^2$，由 $-1 \leqslant b \leqslant -\frac{1}{2}$，$1 \leqslant x_2 \leqslant 2$ 可得 $f'(x_2)<0$，$\therefore f(x_2)$ 为 $[1,2]$ 上的减函数. $-16-12b=f(2) \leqslant f(x_2) \leqslant f(1)=-2-3b$，又 $-1 \leqslant b \leqslant -\frac{1}{2}$，可知 $-2-3b$ 的最大值是 1，$-16-12b$ 的最小值是 -14，从而 $-14 \leqslant f(x_2) \leqslant 1$.

问题 3　对上面的处理方法有什么看法？请同学们发表自己的高见.

结合学生的交流，教师可做以下点：由第(1)问可知，b,c 之间是相互约束的，单独选择 b 或 c 来反映 $f(x_2)$ 的范围都有可能使所求范围扩大了，从这个角度讲策略 1 的正确答案有点巧合. 更一般的 $f(x_2)$ 的范围是用同时含 b，c 的条件来准确反映的，你能解决这一问题吗？

设计意图　进一步激发学生求知欲，思维火花再一次碰撞，让学生从更高层次上把握解题的规律，进一步培养学生用通式通法解决问题的意识，不能仅停留在一招一式的指导上.

在学生思考的基础上展示以下解法：

一般解法：$f(x_2)=x_2^3+3bx_2^2+3cx_2=x_2(x_2^2+2bx_2+c)+bx_2^2+2cx_2$，由 $f'(x_2)=0$ 得 $x_2^2+2bx_2+c=0$，$f(x_2)=bx_2^2+2cx_2$，由(1)的结论 $-1 \leqslant b \leqslant -\frac{1}{2}$，$-2 \leqslant c \leqslant 0$，可得 $f'(x_2)=2bx_2+2c<0$，$\therefore f(x_2)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数. $\therefore 4b+4c=f(2) \leqslant f(x_2) \leqslant f(1)=b+2c$. 再由(1)的约束条件可知 $4b+4c$ 在点 $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$ 处取最小值 -10，$b+2c$ 在直线 $2b+c+1=0$ 上取最大值 $-\frac{1}{2}$. 因此有 $-10 \leqslant f(x_2) \leqslant -\frac{1}{2}$.

问题 4　反思第(2)题的解决过程，我们注意到此题的求解依赖于两个因素：一是正确求出 b,c 的范围，二是 $f(x_2)$ 的范围能用 b,c 的线性表示. 由 x_1,x_2 是 $f'(x)=0$ 的两个根，能否借助已知范围的 x_1,x_2 表示出 b,c 呢？这样将会大大减少运算量！

设计意图　"麻烦的思路到底麻烦在什么地方，能不能变简单些？特殊的思路到底特殊在什么地方，能不能推广到一般？"(罗增儒语)在高三的复习中教师要向学生灌输这种思想.

在学生思考的基础上展示以下解法：

由(1)知 $x_1+x_2=-2b$，$x_1x_2=c$，

$$\therefore f(x_2)=-\frac{1}{2}x_2^3+\frac{3}{2}x_1x_2^2=-\frac{1}{2}x_2^2(x_2-3x_1).$$

由 $-1 \leqslant x_1 \leqslant 0$，$1 \leqslant x_2 \leqslant 2$，可得

$x_2-3x_1 \in [1,5]$，$\frac{1}{2}x_2^2 \in \left[\frac{1}{2},2\right]$，

$\therefore -10 \leqslant f(x_2) \leqslant -\frac{1}{2}$.

3. 归纳整理，整体认知(略)

4. 作业

就今天的问题写一篇解题感悟，主要从涉及到的知识、应用的方法以及对整个解题过程的整体认识这些方面入手.

三、教学思考

1. 关于高考试题的使用

罗亲和罗增儒教授在《高考改革与陕西自主命题——高考数学陕西自主命题的研究之一》一文中说"高考试题经过全国考生的实践检验和全国教师的深入研究，科学性强(漏洞也清楚)，解题思路明朗，解题书写规范，评分标准清晰，是优质的训练素材"，"能提高复习的针对性，近年高考试题体现了命题风格、命题热点、命题形式，有利于考生适应高考情境，提高高考复习的针对性."但是如何使用好高考试题，或者说让高考试题的使

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

例题探究性教学的有效设计

王春飞

(浙江省宁波市四明中学,315040)

在高中数学课堂教学过程中,例题讲解课一直占据重要的地位.如何有效地提高例题讲解课的课堂效率,是许多数学教师困扰的一个问题.平时教学中,精选一些富有探究性和切实提升学生思维能力的典型习题进行推广、变式探究,通过师生共同综合、选择、确定待解决的学生"最近发展区"内的问题,不断转换、分解,对拓宽学生的解题思路,培养学生探究能力是非常有效的.这里笔者试以一道经典考题作为切入口,通过精心设计其变式题、拓展题,恰当增设思维梯度,使其尽量贴近学生的最近发展区,触及学生的兴奋点,期望能把学生从某种抑制状态下激发出来,产生触类旁通、举一反三和以一当十的效果.

一、呈现例题

例题 已知直线 $y = x - 2$ 与抛物线 $y^2 = 2x$ 相交于 A、B 两点,求证: $OA \perp OB$.

分析 这是笔者在高二月考测试中所用的一道考题,是一道直线与抛物线相交弦的问题.主要考查学生利用向量,韦达定理并通过运算解决问题的能力.

证法 1 (求 A、B 两点坐标) 由 $k_{OB} \cdot k_{OA} = -1$,得 $OA \perp OB$.

证法 2 (向量法) 由 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$,得 $OA \perp OB$.

证法 3 (利用韦达定理) 由方程 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 设 $A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$,则有

$$k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1,$$

$\therefore OA \perp OB$.

证法 4 (几何法) 由方程 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 设 $A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$,Q 为 AB 的中点

因 $|AB| = 2\sqrt{10}$,$\therefore |AP| = \sqrt{10}$,又因 $|OP| = \sqrt{10} = \frac{1}{2}|AB|$,$\therefore$ 点 O 在以 AB 为直径的圆上.$\therefore OA \perp OB$.

通过探究一题多解,强化知识间的横向联系,激发学生的探究意识.同时进行一题多探,纵向引申,多向发散,挖掘知识内涵,增强学生探究意识,激发学生的探究愿望.

二、横向探究

探究 1 直线 $y = k(x - 2p)$ 与抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 相交于点 A 和 B,求证: $OA \perp OB$.

用更有效,却是仁者见仁智者见智.笔者认为根据教学内容和复习进度选择一些高考试题编制成课堂教学设计,不失为一种有效的尝试.单纯地把现成的试题当成练习题,不能充分体现出试题的价值.

2. 关于高三一轮复习中例题、习题的教学

高三一轮复习中例题、习题的教学一直是广大高三数学教师重点探讨的内容.笔者认为,高效的例题、习题的教学,不仅要讲怎样去分析、探索解题的思路,指出有几种解法,而且更重要的是要讲从什么起点出发,以怎样方向前行,用哪个方法去解才最简便,其解题思维的起点、方向、解法又是怎样想到的.要让学生通过不同方法的比较,加深对问题的理解深度,以培养学生提高解决问题的能力.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net