



由一道2022年全国甲卷高考题引发的探究 ——谈谈离散型随机变量的分布列与数学期望

苗本彩

(山东省沂源县第二中学)

本文对2022年全国甲卷理科第19题进行展示和剖析,以问题为导向,厘清离散型随机变量分布列与数学期望问题的求解思路和方法,然后通过几个类似的典型题目的训练提高学生对这类问题的处理能力,并探讨高考数学中概率解答题的命题趋势.

1 2022年高考题再现

题目 (2022年全国甲卷理19)甲、乙两个学校进行体育比赛,比赛共设三个项目,每个项目胜方得10分,负方得0分,没有平局.三个项目比赛结束后,总得分高的学校获得冠军.已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为0.5,0.4,0.8,各项目的比赛结果相互独立.

(1)求甲学校获得冠军的概率;

(2)用 X 表示乙学校的总得分,求 X 的分布列与期望.

分析 本题目主要考查了离散型随机变量及其分布列,以及离散型随机变量的期望与方差.这类题型考查学生的转化思想和数学运算核心素养.要解答这道高考题,首先要根据相互独立事件的概率乘法公式,求出甲学校获胜2场或3场的概率,由此可以得到甲学校获得冠军的概率;然后再去思考乙学校的总得分 X 的可能取值,分别求出 X 取上述值时的概率,由此求得分布列与数学期望.

2 解法探究

(1)甲学校在三个项目中获胜的概率分别为0.5,0.4,0.8,则两个学校每场比赛获胜的概率如表1所示.

表1

	第一场比赛	第二场比赛	第三场比赛
甲学校获胜概率	0.5	0.4	0.8
乙学校获胜概率	0.5	0.6	0.2

甲学校要获得冠军,需要在3场比赛中至少获胜2场.甲学校3场全胜的概率为

$$P_1 = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.16,$$

甲学校3场获胜2场败1场的概率为

$$P_2 = 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.44,$$

所以甲学校获得冠军的概率为 $P = P_1 + P_2 = 0.6$.

(2)乙学校的总得分 X 的可能取值为0,10,20,30,其概率分别为

$$P(X=0) = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.16,$$

$$P(X=10) = 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.44,$$

$$P(X=20) = 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6 \times 0.2 = 0.34,$$

$$P(X=30) = 0.5 \times 0.6 \times 0.2 = 0.06,$$

则 X 的分布列如表2所示.

表2

X	0	10	20	30
P	0.16	0.44	0.34	0.06

$$E(X) = 0 \times 0.16 + 10 \times 0.44 + 20 \times 0.34 + 30 \times 0.06 = 13.$$

3 离散型随机变量分布列的求解策略

对离散型随机变量分布列的考查是概率考查的主要形式,那么准确地列出分布列显得至关重要,下面探讨如何准确求解离散型随机变量的分布列.

1)弄清“随机变量的可能取值”

弄清“随机变量的可能取值”是第一步,确定随机变量的取值时,要做到准确无误,同时需要注意随机变量是从几开始取值,每种取值对应几种情况.

2)弄清事件类型

计算概率前要确定事件的类型,同时正确运用排列与组合知识求出相应事件的概率.

3)注意验证随机变量的概率之和是否为1

通过验证概率之和是否为1,可以检验所求概率是否正确,还可以检验随机变量的可能取值是否重复



或遗漏.

4 针对性训练

练习 1 为响应大学毕业生自主创业的号召,小李毕业后开了水果店,水果店每天以每个 5 元的价格从农场购进若干西瓜,然后以每个 10 元的价格出售.如果当天卖不完,剩下的西瓜作赠品处理.

(1)若水果店一天购进 16 个西瓜,求当天的利润 y (单位:元)关于当天需求量 n (单位:个, $n \in \mathbf{N}$) 的函数解析式.

(2)水果店记录了 100 天西瓜的日需求量(单位:个),整理得到表 3.

表 3

日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率.

(i) 若水果店一天购进 16 个西瓜, X 表示当天的利润(单位:元),求 X 的分布列、数学期望及方差;

(ii) 若水果店计划一天购进 16 个或 17 个西瓜,你认为应购进 16 个还是 17 个? 请说明理由.

解析 (1)当 $n \geq 16$ 时, $y = 16 \times (10 - 5) = 80$; 当 $n \leq 15$ 时, $y = 5n - 5(16 - n) = 10n - 80$. 因此

$$y = \begin{cases} 10n - 80, & n \leq 15, \\ 80, & n \geq 16 \end{cases} (n \in \mathbf{N}).$$

(2)(i) 依题意可得 X 的可能取值为 60, 70, 80, 则 $P(X = 60) = 0.1$, $P(X = 70) = 0.2$, $P(X = 80) = 0.7$, 所以 X 的分布列如表 4 所示.

表 4

X	60	70	80
P	0.1	0.2	0.7

$$E(X) = 60 \times 0.1 + 70 \times 0.2 + 80 \times 0.7 = 76,$$

$$D(X) = 16^2 \times 0.1 + 6^2 \times 0.2 + 4^2 \times 0.7 = 44.$$

(ii) 购进 17 个时, 当天的利润为

$$y = (14 \times 5 - 3 \times 5) \times 0.1 + (15 \times 5 - 2 \times 5) \times 0.2 +$$

$$(16 \times 5 - 1 \times 5) \times 0.16 + 17 \times 5 \times 0.54 = 76.4,$$

因为 $76.4 > 76$, 所以应购进 17 个.

练习 2 某企业生产一种如图 1 所示的电路系统: 要求三个不同位置 1, 2, 3 接入

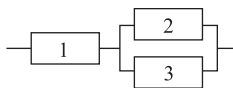


图 1

三种不同类型的电子元件, 且备选电子元件为 A, B, C 型, 它们正常工作的概率分别为 $0.9, 0.8, 0.6$. 假设接入三个位置的电子元件能否正常工作相互独立, 当且仅当 1 号位元件正常工作, 同时 2 号位与 3 号位元件中至少有一件正常工作时, 电路系统才能正常工作.

(1) 共可组装出多少种不同的电路系统?

(2) 求出 A 在 1 号位, B 在 2 号位, C 在 3 号位时该电路系统正常工作的概率, 并指出组装出的不同的电路系统中能正常工作概率的最大值, 说明理由.

(3) 若以每件 5 元、3 元、2 元的价格分别购进 A, B, C 型元件各 100 件, 组装成 100 套电路系统出售, 设每套系统组装费为 20 元. 每套系统的售价为 150 元, 但每售出 1 套不能正常工作的系统, 除了退还购买款, 还将支付售价的 3 倍作为赔偿金, 求生产销售 100 套电路系统的最大期望利润.

解析 (1) 共可组装出 $A_3^3 = 6$ 种不同的电路系统.

(2) A 在 1 号位, B 在 2 号位, C 在 3 号位时该电路系统正常工作的概率为 $P(A) = 0.9 \times [1 - (1 - 0.8) \times (1 - 0.6)] = 0.9 \times 0.92 = 0.828$.

6 种电路系统正常工作的概率只有下面不同三类: 用 A, B, C 分别表示事件“1 号位接 A, B, C 型元件时, 电路系统能正常工作”, 则

$$P(B) = 0.8 \times [1 - (1 - 0.6) \times (1 - 0.9)] = 0.8 \times 0.96 = 0.768,$$

$$P(C) = 0.6 \times [1 - (1 - 0.8) \times (1 - 0.9)] = 0.6 \times 0.98 = 0.588.$$

因为 $P(A) > P(B) > P(C)$, 所以当 1 号位接入 A 型元件时, 电路系统正常工作的概率最大, 最大值为 0.828.

(3) 电路系统正常工作的概率越大, 期望利润会越高, 应把 A 型元件接入 1 号位, 设每套电路系统的利润为 X , 若能正常工作, 则 $X = 150 - 20 - 10 = 120$ 元; 若不能正常工作, 则 $X = -20 - 10 - 450 = -480$ 元, 所以 X 的分布列如表 5 所示.

表 5

X	120	-480
P	0.828	0.172

$E(X) = 120 \times 0.828 - 480 \times 0.172 = 16.8$ 元, 故生产 100 套电路系统的最大期望利润为 $100 \times 16.8 = 1680$ 元.

(完)