# 基于课程标准的“正态分布”教学准备

冯维清[1] 李 响[2]
1 江苏省东海高级中学（222300） 2 福建师范大学数学与统计学院（350108）

“正态分布”是连续型随机变量的概率分布，是自然界中最常见的一种分布，它不仅属于概率的范畴，同时也是统计的基石，在实际生产、生活中的应用非常广泛．为完善高中数学《概率与统计》中随机变量的知识体系，“正态分布”内容已纳入《普通高中数学课程标准(2017年版)》[1]（以下简称“标准”）．取消文理分科后，正态分布内容作为概率内容的一部分，在2021年新高考中已经得到体现．目前几种不同版本教材对“正态分布”的内容介绍不尽相同，且大部分教师无成熟的教案、学案、课件等教学资源可借鉴．若要合理设定教学目标、设计发展学生数学核心素养的教学文本，课前的教学准备就成为一道必须跨越的门槛．为此，笔者以2020年人教B版普通高中数学选择性必修教材[2]（以下简称“教材”）第二册第四章第2.5节“正态分布”为例，对本部分的教学准备作借鉴性说明．

## 1 研究“标准”，确立教学目标的“制高点”

新课程的基本理念是以主题为引领，使课程内容情景化、结构化，以学科一般观念为核心，聚焦单元主题教学．正态分布在“标准”中是次位概念，呈现的条目为“①通过误差模型，了解服从正态分布的随机变量．通过具体实例，借助频率直方图的几何直观，了解正态分布的特征．②了解正态分布的均值、方差及其含义”．其隶属于重要概念“随机变量及其分布”，上述两个概念又被统摄于“随机事件的概率”之下．在实际教学中，一般概念的形成不是一两节课就能完成的，确立每一节课的教学目标并从不同的维度指向一般概念，是一般概念教学的必由之路，故研究“标准”中不同层次概念间的关系，对确立“节”的教学目标具有重要教学意义．

“标准”中对所有的次位概念前面都冠以知识性目标行为动词，即“行为动词+数学术语”，比如对“正态分布的随机变量”前面冠以“了解”二字（了解是简单应用、理解是综合应用、掌握是灵活应用等），这种命题式的描述，能准确描述教学深度和应用水平，防止不必要的“拔高”或“降低”，为设定“节”的教学目标指明了方向．因此，教师在确立教学目标时，务必要研读“标准”，熟知并理解各个行为动词的内涵，并知晓“节”的内容属于认知水平的何种层次．部分教师不研究“标准”，常将掌握水平变成综合应用水平，无意中降低了教学内容在课程中的教育价值．所以“节”的教学目标制定，应在研究“标准”后再确立．

## 2 分析教材，锚定正态分布的“切入点”

教材中，正态分布隶属于“随机变量的概率分布”范畴，是学习随机变量最后呈现的内容．这样的编排能够让学生充分认识随机变量及其与事件的联系、离散型随机变量中的超几何分布与二项分布、随机变量的期望与方差，再学习正态分布，遵循学生的认知规律和数学内在发生发展的规律．正态分布是二项分布的极限，是由二项分布延伸而来的，是从离散过渡到连续的一个重点内容．因此，要了解正态分布，首先要理解二项分布，知道“中心极限定理”的直观意义：若一个量 $X$ 是许多微小的量的总和，当每一个微小的量和 $X$ 相比都可以忽略不计时，则 $X$ 近似服从正态分布．因此，二项分布和“中心极限定理”，可以作为“正态分布”知识的“切入点”．

找到这一“切入点”，教师就可以从学生已掌握的二项分布入手，若 $X \backsim B(n,\frac{1}{2})$，当 $n$ 充分大时，$X$ 分布列的直观图对应的概率密度曲线就类似正态分布曲线；教师还可以从实际生产、生活中入手，如自动流水线包装的食盐实际质量和标准质量之间的误差分析等，这些均为了解“正态分布”概念作了良好的铺垫．

## 3 阅读史料，定位数学文化的“融入点”

在课堂教学中适当渗透数学文化，可以培养学生学习数学的兴趣，激发学习积极性，促进数学理解．如教材中直接给出正态分布密度函数时，学生一般感觉突兀，可以先介绍棣莫弗的发现过程，推荐阅读《正态分布的前世今生》，了解正态分布的发展史；在学习正态分布定义时，可以先介绍拉普

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

拉斯和高斯利用正态曲线来研究“随机误差”，特别是高斯基于误差的正态分布最小二乘理论对后世影响极大，因此正态分布也称为高斯分布，等等.教师有意识地推荐学生扩展阅读，帮助学生将所学知识综合化、立体化、网络化，在知识的相互比较、补充、融合甚至重新构建中建立起越来越完整的知识体系，也培养学生越来越浓厚的学科情感[3].

**4 猎取案例，扩增正态分布教学的“信息点”**

由于“正态分布”是高考新增内容，之前大部分教师对本部分内容关注少、不熟悉，导致该知识领域教学案例储备不足．所以，授课前要多阅读这方面的书籍，多储存正态分布应用的相关知识，包括正态分布的发生发展、性质特征、$3\sigma$原则和一般正态分布变换成标准正态分布等．只有这样，教师才能在教学过程中进行有效设问和答疑，帮助学生构建重要概念和发展素养．为此教师至少应理解性储备如下信息点：（1）什么是连续型随机变量？有什么特点？（连续型随机变量概念、中心极限定理、概率密度曲线等）（2）正态分布函数的解析式是什么？正态曲线的特征和性质有哪些？（3）正态分布中的$3\sigma$原则及其相关应用的具体案例．（4）任意正态分布如何转换成标准正态分布．此外，有关信息技术在正态分布这一节中的应用也是猎取的重点之一．

**5 整合教材，厘清概念与素养教学框架的“建构点”**

苏教版教材以学生的身高为例，借助频率分布直方图和概率密度曲线认识正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义，教材中只有一个关于标准正态分布的应用例题；人教A版以自动流水线上的袋装食盐的实际质量与标准质量之间的误差分析为例，引入正态分布及密度函数、正态曲线的特征，以生活中的实例应用介绍了$3\sigma$原则；人教B版以$X\backsim B(6,\frac{1}{2})$为例，通过其分布列的直观图引入正态分布，并进一步研究正态曲线的性质、$3\sigma$原则、任意正态分布转化成标准正态分布以及信息技术在正态分布中的应用，教材中有4个关于正态分布应用的例题．在教学准备中，要整合教材，关注学科本质的学习，立足案例，适当补充，合理设计概念生成和发展素养的教学框架，找准其“建构点”．

表1 “正态分布”一节的概念生成和素养发展教学框架

| 问题驱动 | 思维引导 | 概念形成 | | 发展素养 |
|---|---|---|---|---|
| | | 一般概念 | 思想方法 | |
| 1.当$X\backsim B(6,0.5)$时，画出$X$的分布列的直观图并观察其有哪些特征？<br>2.为什么选择$p=0.5$的二项分布进行研究？ | 具体到抽象 | 正态分布是二项分布的极限.当$p=0.5$时的二项分布其概率具有明显的对称性. | 数形结合、极限 | 数据分析（通过列表、绘图培养学生动手操作、数据分析能力）、数学建模 |
| 3.正态分布的概率密度函数表达式是什么？<br>4.函数表达式中的两个参$\mu,\sigma$有何意义？<br>5.正态曲线的特征有哪些？ | 主动探究 | $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$\mu,\sigma$分别是位置参数和形状参数；曲线关于$x=\mu$对称，与$x$轴围成的面积为1，$\sigma$决定正态曲线的胖瘦，$\sigma$越大，曲线越“胖”，$\sigma$越小，曲线越“瘦”. | | |
| 6.$3\sigma$原则是什么？它在生产实践中的应用何？ | 实验总结 | $P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx0.683$<br>$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx0.954$<br>$P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx0.997$ | 抽象概括 | 数学运算、逻辑推理 |
| 7.任意正态分布如何转换成标准正态分布？ | 一般到特殊 | $Y\backsim N(\mu,\sigma^2)$，<br>令$X=\frac{Y-\mu}{\sigma}$，<br>则可以证明$X\backsim N(0,1)$ | 转化 | |

另外，在教学方式选择方面，应组织以自主探究为特点的主动学习方式．如研究正态分布曲线性质，任意正态分布转化成标准正态分布时，通过设计若干问题，促进学生自主学习、理性思考，主动归纳总结出正态曲线的特征和任意正态分布转换成标准正态分布的一般方法．

**6 关注评价，聚焦理解概念、发展素养的“检测点”**

“标准”在“评价建议”中明确指出，评价内容要结合具体的教学内容，以重要概念等主干知识为依托，检测学生数学学科核心素养的发展水平．教学实践说明，在检测环节设置合适的、真实的问题情境的检测点，有利于学生内化对核心概念的理解和迁移应用，有利于提升学生的核心素养水平．所以，教师命题的“检测点”一定要聚焦在理解概念和提升素养上．下面呈现两例检测题，以示说明：

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

**题1** 1809年，德国数学家高斯将其在1801年计算“谷神星”轨道的方法公布，即将正态误差分布为基础的最小二乘法公布，使得其在正态分布历史地位的确定中起到了决定性的作用，因此在原德国10马克上留有高斯头像和正态曲线，如图1．已知随机变量 $X \backsim N(2,3^2)$，其正态分布的密度函数为：$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$．若 $P(X<2a-1)=P(X>2a+1)$，则实数 $a$ 的值为_____．

图1 德国10马克上的高斯头像与正态曲线

**题2** 2015年，山西理科高考分数 $X \backsim N(418,97^2)$，一本分数线515分，二本分数线442分；如果2016年山西理科高考分数 $Y \backsim N(411,108^2)$，假设2016年和2015年一本(二本)录取率保持不变，试计算2016年一本（二本）分数线的近似值．

综上所述，在“正态分布”一节教学前，教师一定要储备与之相关的学科知识和学科教学知识，丰富教学“内存”．同时，教学起点要落在学生已有的知识结构上，引导学生理解正态分布作为连续型随机变量，是对前面学习离散型随机变量的补充和拓展，是概率统计知识的延续．此外，还要联系生活实际，举例说明正态分布在生活中的广泛应用．

**参考文献**

[1]中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准(2017年版)[M]．北京：人民教育出版社，2018

[2]人民教育出版社，课程教材研究所，中学数学教材实验研究组．普通高中教科书（选择性必修第二册B版）[M]．北京：人民教育出版社，2020

[3]黄培华．追求自然　提升品位——《正态分布》教学反思[J]．福建中学数学，2016（01）：30-33

（本文系江苏省教育科学“十四五”规划2021年度课题“高中生数据分析素养的PBL活动建构与实施策略研究”（课题编号：D202102289）阶段性研究成果）

# 让数学素养在技能叠加和能力拆解中落地

林锦莺　　福建省厦门双十中学（361001）

在漫长的数学教育中，我们最开始强调“双基”，即基础知识和基本技能的掌握；后来发展出三维目标．因为有双基目标的学习远远不能满足对人才的要求，还要注重过程和方法以及情感态度价值观．于是，如今我们的教育目标是要培养具备学科素养的全面发展的人才．

而什么是“素养”？“素养”是指个体在信息化、全球化、学习型社会，面对复杂的不确定情境时，综合运用学科知识、观念、方法解决实际问题所表现出来的关键能力、必备品格与价值观念．笔者认为以前的“双基”也好、三维目标也好，与现在的素养都不矛盾，也不违背如今核心素养培养的目的．拿开车举例，“双基”的掌握，好比你学会了开车的基本技能，而三维目标的实现好比你懂得在路上自如驾车，而素养就好比你已经具备了安全驾驶的意识和能力，并且在复杂天气路况等情景下做出调整应对的意识和能力．

面对培养具备学科素养人才的这个重要课题，如何找到有力的抓手和落脚点，让素养落地？笔者尝试从技能叠加和能力拆解两个角度谈谈数学素养的落地培养．

## 1 技能叠加

我们知道数学技能是指通过学习而形成的符合一定法则的数学活动方式．在早期，数学教育强调数学技能的学习掌握，确实明显看到学生因为数学技能增加大大提升了学生解决数学题目的能力．但是我们也应该看到很多学生在感觉一道数学题已经理解的状态下面对变式题却束手无策，如何解决这个困惑呢？教师可以关注技能叠加的举措，也就是在单一技能已经掌握的情况下创造设计技能叠加题，让前一个技能的结果作为下一个技能的条件或步骤，然后继续计算推理论证解决问题．这种技能叠加的最佳训练结果就是自动化的运用，你不再需要思考技能的启动方式或顺序，直接就把相关多个技能运用出来．

**例1** 写出一个无理数 $x$，则 $x$ 可以是____．（只

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net