

看似巧合 实为必然

——一道堵车次数的数学期望与方差引发的探究

湖南省怀化市精楷英复读学校(418000); 湖南省会同县第一中学(418300) 于先金

湖南省会同县第一中学(418300) 李林雕

摘要 本文对一个因堵车需对行驶路线进行选择的问题进行了一些探究, 得到了一个关于堵车次数的数学期望与方差的结论.

关键词 堵车次数; 分布列; 数学期望; 方差

一、试题呈现, 问题解析

题目 如图1, 某工人的住所在A处, 上班的企业在D处, 上下班的路线有三条路程几乎相等的路线供选择: 环城南路经过路口C, 环城北路经

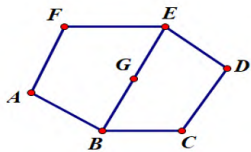


图1

过路口F, 中间路线经过路口G. 如果开车到五个路口B, C, E, F, G因遇到红灯而堵车的概率分别 $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, 再无别的路口红灯.

(1) 为了减少开车在路口因遇到红灯而堵车的次数, 这位工人应选择哪条行驶路线?

(2) 对(1)所选择的路线, 求其堵车次数的方差.

这是教辅书《三维设计(选择性必修第3册)》(南方出版社, 2021年8月)第4页中的一道例题, 各路口因遇到红灯而发生堵车事件是相互独立的, 利用相互独立事件的概率公式可求出一条路线因遇到红灯而发生堵车X次的概率, 进而可求出随机变量X的数学期望和方差, 最后行驶路线的选择由堵车次数X的数学期望的大小来确定.

二、参考答案, 通性通法

解 (1) 设这位工人选择行驶路线A-B-C-D, A-F-E-D, A-B-G-E-D分别堵车 X_1, X_2, X_3 次, 则 $X_{1,2} = 0, 1, 2, X_3 = 0, 1, 2, 3$.

由于

$$\begin{aligned} P(X_1 = 0) &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}, \\ P(X_1 = 1) &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ P(X_1 = 2) &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

则 X_1 的数学期望为

$$E(X_1) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{7}{10}.$$

由于

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}, \\ P(X_2 = 1) &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{12}, \\ P(X_2 = 2) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

则 X_2 的数学期望为

$$E(X_2) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{12} = \frac{7}{12}.$$

由于

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}, \\ P(X_3 = 1) &= \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{47}{120}, \\ P(X_3 = 2) &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{10}, \\ P(X_3 = 3) &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{120}, \end{aligned}$$

则 X_3 的数学期望为

$$E(X_3) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{47}{120} + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{120} = \frac{37}{60}.$$

比较知 $E(X_2)$ 最小, 所以这位工人应选择行驶路线A-E-F-D.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 由 (1) 可知 } E(X_2) &= \frac{7}{12}, P(X_2 = 0) = \frac{1}{2}, \\ P(X_2 = 1) &= \frac{5}{12}, P(X_2 = 2) = \frac{1}{12}, \text{ 则 } X_2 \text{ 的方差为} \\ D(X_2) &= (0 - \frac{7}{12})^2 \times \frac{1}{2} + (1 - \frac{7}{12})^2 \times \frac{5}{12} + (2 - \frac{7}{12})^2 \times \frac{1}{12} = \frac{59}{144}. \end{aligned}$$

点评 本题考查相互独立事件的概率和离散型随机变量的数学期望和方差, 易错点是题中出现的道路情况比较多, 稍有不慎计算就会出错.

三、提出疑问, 探究求证

$$\begin{aligned} \text{易发现 } E(X_1) &= \frac{7}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2}, E(X_2) = \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \\ E(X_3) &= \frac{37}{60} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}, D(X_2) = \frac{59}{144} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{4} \times (1 - \frac{1}{4}).$$

这是巧合还是必然? 若开车到五个路口 B, C, E, F, G 因遇到红灯而堵车的概率分别为 $\alpha, \beta, \gamma, m, n$, 则是否有 $E(X_1) = \alpha + \beta, E(X_2) = m + \gamma, E(X_3) = \alpha + n + \gamma, D(X_1) = \alpha(1 - \alpha) + \beta(1 - \beta), D(X_2) = m(1 - m) + \gamma(1 - \gamma), D(X_3) = \alpha(1 - \alpha) + m(1 - m) + \gamma(1 - \gamma).$

由于

$$P(X_1 = 0) = (1 - \alpha)(1 - \beta) = 1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta,$$

$$P(X_1 = 1) = \alpha(1 - \beta) + (1 - \alpha)\beta = (\alpha + \beta) - 2\alpha\beta,$$

$$P(X_1 = 2) = \alpha\beta,$$

所以 X_1 的数学期望与方差分别为

$$E(X_1) = 0 \times [1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta] + 1 \times [(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta] + 2 \times \alpha\beta = \alpha + \beta,$$

$$D(X_1) = [0 - (\alpha + \beta)]^2 [1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta] + [1 - (\alpha + \beta)]^2 [(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta] + [2 - (\alpha + \beta)]^2 \alpha\beta,$$

展开化简、整理得 $D(X_1) = \alpha(1 - \alpha) + \beta(1 - \beta).$

同理可证其它几个结论.

四、归纳总结, 得出结论

定理 从 A 地开车到 B 地, 经过 n 个路口 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 因遇到红灯而堵车的概率分别为 $p_1, p_2, \dots, p_n$, 发生堵车的次数为 X , 则

$$(1) E(X) = \sum_{i=1}^n p_i;$$

$$(2) D(X) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i).$$

证明 设 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{路口 } A_i \text{ 发生堵车;} \\ 0, & \text{路口 } A_i \text{ 不发生堵车;} \end{cases} (i = 1, 2, \dots, n),$ 所以 $X = \sum_{i=1}^n X_i, X_i$ 的分布列为

X_i	1	0
p	p_i	$1 - p_i$

从而 $E(X_i) = p_i, D(X_i) = p_i(1 - p_i).$

$$(1) E(X) = E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n p_i;$$

(2) 因为 $X_i = 1 \Leftrightarrow X_i^2 = 1, X_i = 0 \Leftrightarrow X_i^2 = 0$, 所以 X_i^2 的分布列为

X_i^2	1	0
p	p_i	$1 - p_i$

从而 $E(X_i^2) = p_i.$

当 $i \neq j$ 时, $X_i = X_j = 1 \Leftrightarrow X_i X_j = 1$, 所以 $X_i X_j$ 的分布列为

$X_i X_j$	1	0
p	$p_i p_j$	$1 - p_i p_j$

从而 $E(X_i X_j) = p_i p_j.$ 所以

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E((\sum_{i=1}^n X_i)^2) \\ &= E(\sum_{i=1}^n X_i^2) + 2E(\sum_{i \neq j} X_i X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n (E(X_i^2)) + 2 \sum_{i \neq j} E(X_i X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i + 2 \sum_{i \neq j} p_i p_j, \end{aligned}$$

由方差的性质得

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i + 2 \sum_{i \neq j} p_i p_j - (\sum_{i=1}^n p_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i + 2 \sum_{i \neq j} p_i p_j - (\sum_{i=1}^n p_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} p_i p_j) \\ &= \sum_{i=1}^n (p_i - p_i^2) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i). \end{aligned}$$

波利亚语: “没有一道题目是可以解决得十全十美的, 总剩下一些工作要做, 经过充分的探讨总结, 总会有点滴的发现, 总能改进这个解答, 而且在任何情况下, 都能提高自己对这个解答的理解水平”.

五、试题链接, 提升能力

广东省 2012 年高考理科数学仿真模拟试题:

张先生家住 H 小区, 他工作在 C 科技园区, 从家开车到公司上班路上有 L_1, L_2 两条路线 (如图), L_1 路线上有 $A_1,$

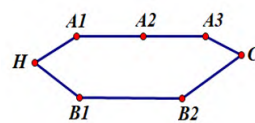


图 2

A_2, A_3 三个路口, 各路口遇到红灯的概率均为 $\frac{1}{2}$; L_2 路线上有 B_1, B_2 两个路口, 各路口遇到红灯的概率依次为 $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}.$

(I) 若走 L_1 路线, 求最多遇到 1 次红灯的概率;

(II) 若走 L_2 路线, 求遇到红灯次数 X 的数学期望;

(III) 按照“平均遇到红灯次数最少”的要求, 请你帮助张先生从上述两条路线中选择一条最好的上班路线, 并说明理由.

答案 (I) $\frac{1}{2}$; (II) $\frac{27}{20}$; (III) 选择 L_2 路线上班最好.

参考文献

- [1] 唐锐光. 超几何分布、二项分布的期望与方差公式的统一证明 [J]. 数学通讯 (下半月), 2009(11): 24.