

应用数学期望计算概率

合肥市第七中学 (230001) 李毅然

通常情况下,我们会通过随机变量的分布列计算随机变量的期望,实际上,我们也可以反过来利用数学期望计算概率.

问题 甲箱的产品中有 5 个正品和 3 个次品,乙箱的产品中有 4 个正品和 3 个次品.

(1) 从甲箱中任取 2 个产品,求这 2 个产品都是次品的概率;

(2) 若从甲箱中任取 2 个产品放入乙箱中,然后再从乙箱中任取 1 个产品,求取出的这个产品是正品的概率.

参考答案解法:

$$(1) P\{2 \text{ 个产品都是次品}\} = \frac{C_3^2 C_5^0}{C_8^2} = \frac{3}{28}.$$

(2) 设事件 A 为“从乙箱中取一个正品”,事件 B_1 为“从甲箱中取出 2 个产品都是正品”,事件 B_2 为“从甲箱中取出

1 个正品,1 个次品”,事件 B_3 为“从甲箱中取出 2 个产品都是次品”. 事件 B_1 , 事件 B_2 , 事件 B_3 是样本空间 Ω 的一个分割.

$$P(B_1) = \frac{C_5^2 C_3^0}{C_8^2} = \frac{5}{14}, P(B_2) = \frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28},$$

$$P(B_3) = \frac{C_3^2 C_5^0}{C_8^2} = \frac{3}{28}.$$

故 $P(A|B_1) = \frac{2}{3}, P(A|B_2) = \frac{5}{9}, P(A|B_3) = \frac{4}{9}$. 所以

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$+ P(B_3)P(A|B_3)$$

$$= \frac{5}{14} \times \frac{2}{3} + \frac{15}{28} \times \frac{5}{9} + \frac{3}{28} \times \frac{4}{9} = \frac{7}{12}.$$

对于本题的第二小问可以有更一般、更简洁的做法,我们先证明如下引理.

$$(2) \text{ 证明: } x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdots x_{2n-1} < \sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}.$$

该题目第二问所证为: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. 将缺项补齐得:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1},$$

记

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}, \quad Q = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1},$$

则由糖水不等式有 $P < Q$ 且 $P \cdot Q = \frac{1}{2n+1}$, 于是

$$P^2 < P \cdot Q = \frac{1}{2n+1}, \text{ 所以}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

仿照以上手法,我们还可以考虑取三项中的一项: 因为

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{3n-2}{3n-1} \cdot \frac{3n-1}{3n} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{1}{3n+1},$$

记

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{3n-2}{3n-1}, Q = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{9} \cdots \frac{3n-1}{3n},$$

$$R = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdots \frac{3n}{3n+1},$$

则由糖水不等式有 $P < Q < R$ 且 $P \cdot Q \cdot R = \frac{1}{3n+1}$,

于是 $P^3 < P \cdot Q \cdot R = \frac{1}{3n+1}$, 所以 $P < \frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}$, 即 $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{3n-2}{3n-1} < \frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}$, 从而得到

$$(1+1)(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{7}) \cdots (1+\frac{1}{3n-2}) > \sqrt[3]{3n+1}.$$

波利亚曾指出:“好问题同某种蘑菇有些相像,它们都成堆地生长,找到一个以后,你应当在周围找找,很可能附近就有好几个.”利用这种手法,还可以得到一连串的不等式群,读者不妨一试!

例 6 求证: 当 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ 时

$$(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{3^2}) \cdots (1+\frac{1}{n^2}) < 2.$$

证明 由糖水不等式 2, 有 $\frac{n^2-1}{n^2} < \frac{n^2}{n^2+1}$, 于是 $1+\frac{1}{n^2} = \frac{n^2+1}{n^2} < \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1} (n \geq 2)$, 从而

$$(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{3^2}) \cdots (1+\frac{1}{n^2}) < (\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3})(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4})(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}) \cdots (\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1}) = \frac{2n}{n+1} < 2.$$

从上述问题看到,对于涉及到分式的大小或不等式问题,可以观察所给分式的特征,考虑利用糖水不等式进行适当放缩来处理,这往往能够达到意想不到的效果!

引理 袋中装有 N 只球, 其中白球数为随机变量, 其数学期望为 n (n 是实数), 则从该袋中摸一球得到白球的概率为 $\frac{n}{N}$.

证明 记 X 为袋中的白球数, 则由题设得 $n = E(X) = \sum_{k=0}^N kP\{X=k\}$. 再由全概率公式可得

$$P\{\text{摸一球为白球}\} = \sum_{k=0}^N P\{X=k\}P\{\text{摸一球为白球}|X=k\} \\ = \sum_{k=0}^N P\{X=k\} \frac{k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N kP\{X=k\} = \frac{1}{N} E(X) = \frac{n}{N}.$$

这个引理告诉我们可以利用数学期望来计算一些概率问题, 实际上利用该引理及递推公式可以解决一些很复杂的古典概型概率计算问题.

对于开头的问题的第二小问, 我们可以有如下解法.

解 设从甲箱中取出的正品数为 X , 乙箱的正品数为 Y , 则显然有 $Y = X + 4$. 易知 X 服从超几何分布,

$$E(X) = 2 \times \frac{5}{8} = \frac{5}{4}, E(Y) = E(X+4) = \frac{5}{4} + 4 = \frac{21}{4}.$$

由引理可知 $P(A) = \frac{E(Y)}{4+3+2} = \frac{7}{12}$. 这与参考答案的结果一致. 再来看几个复杂的例子.

例 1 甲袋中有 a 只白球, b 只黑球. 乙袋中有 α 只白球, β 只黑球. 现在从甲袋中随机摸出 c ($c \leq a+b$) 只球放入乙袋中, 求从乙袋中再摸一球为白球的概率.

解 记 X 为从甲袋中所摸 c 只球中的白球数, 则 X 服从超几何分布, 且 $E(X) = \frac{ca}{a+b}$. 此时乙袋中共有 $\alpha + \beta + c$ 只球, 其中白球数 $\alpha + X$ 是一个随机变量. 由引理可得

$$P\{\text{从乙袋中再摸一球是白球}\} \\ = \frac{E(\alpha + X)}{\alpha + \beta + c} = \frac{\alpha + E(X)}{\alpha + \beta + c} \\ = \frac{1}{\alpha + \beta + c} \left(\alpha + \frac{ca}{a+b} \right).$$

例 1 是前述问题的推广.

例 2 甲袋中有 a 只白球 b 只黑球, 乙袋中有 c 只白球 d 只黑球. 从两袋中各摸出一球, 并交换放入另一袋中, 这样做了 n 次之后, 再从甲袋中摸出一球, 求这球是白球的概率.

解 设 X_i, Y_i 分别表示交换 i 次后甲、乙两袋中的白球数, 显然有 $X_i + Y_i = a + c$. 用 ξ_i, η_i 分别表示第 i 次的交换情况

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次从甲袋摸出一只白球,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次从甲袋摸出一只黑球,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次从乙袋摸出一只白球,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次从乙袋摸出一只黑球,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

易知 $X_i = X_{i-1} - \xi_i + \eta_i$, $E(X_i) = E(X_{i-1}) - E(\xi_i) + E(\eta_i)$. 由引理可知 $E(\xi_i) = P\{\text{第 } i \text{ 次从甲袋摸出一只白球}\} = \frac{E(X_{i-1})}{a+b}$, $E(\eta_i) = \frac{E(Y_{i-1})}{c+d}$. 又 $E(X_{i-1}) + E(Y_{i-1}) = a + c$, 于是可得 $E(\eta_i) = \frac{a+c-E(X_{i-1})}{c+d}$, 从而得到递推公式

$$E(X_i) = \frac{a+c}{c+d} + E(X_{i-1}) \left(1 - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+d} \right),$$

$E(X_0) = a$, 从而求得

$$E(X_n) = \frac{(a+c)(a+b)}{a+b+c+d} + \frac{ad-bc}{a+b+c+d} \left(1 - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+d} \right)^n.$$

由引理可得欲求的概率为

$$\frac{E(X_n)}{a+b} = \frac{a+c}{a+b+c+d} \\ + \frac{ad-bc}{(a+b+c+d)(a+b)} \left(1 - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+d} \right)^n.$$

利用例 2 可以很容易解决 2020 年江苏高考理科卷的最后一题.

例 3 (2020 年高考江苏理科卷) 甲口袋中装有 2 个黑球和 1 个白球, 乙口袋中装有 3 个白球. 现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋, 重复 n 次这样的操作, 记甲口袋中黑球个数为 X_n , 恰有 2 个黑球的概率为 p_n , 恰有 1 个黑球的概率为 q_n .

(1) 求 p_1, q_1 和 p_2, q_2 .

(2) 求 $2p_n + q_n$ 与 $2p_{n-1} + q_{n-1}$ 的递推关系式和 X_n 的数学期望 $E(X_n)$ (用 n 表示).

解 (1) 略. (2) 易知 $E(X_n) = 2p_n + q_n$, 由例 2 可以得到 $E(X_n) = \frac{1}{3}E(X_{n-1}) + \frac{2}{3}$, 结合第一小问可以得出 $E(X_1) = \frac{4}{3}$, 进而得到 $E(X_n) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$. 参考答案的解法思路是分别考虑 p_n, q_n 的递推关系式, 得到两个双线性递推关系进行求解, 相对繁琐一些.

很多时候我们总是利用随机变量的分布列来求它的期望, 现在从前面的例子可以看出有时也可以反过来利用期望来求一些概率.

参考文献

- [1] 李贤平, 沈崇圣, 陈子毅. 概率论与数理统计 [M]. 上海: 复旦大学出版社, 2003.