

深度学习理念下的课堂教学设计

——以“正态分布”教学为例

广东省珠海市第一中学(519000) 刘彩云

摘要 本设计借助 GeoGebra 动态教学软件,采用问题链的形式引发学生的深度思考,让学生真正参与到正态分布模型的构建过程中,进而领悟描述连续型随机变量概率分布的思想方法.

关键词 深度学习; 正态分布; 问题链; 信息技术; GeoGebra

深度学习是指在教师引领下,学生围绕着具有挑战性的学习主题,全身心积极参与、体验成功、获得发展的有意义的学习过程^[1].深度学习是培养学生核心素养的重要途径^[1],如何在课堂教学中,让深度学习真正地发生,应是教师教学设计重点.正态分布是高中阶段唯一学习的连续型随机变量的概率分布,由于受所学知识的限制,正态分布的许多结论在教学时无法严格证明或直接计算,学生若是被动接受,便会觉得抽象且枯燥,学习效果不佳.本设计借助 GeoGebra 动态教学软件,采用问题链的形式引发学生的深度思考,让学生真正参与到正态分布模型的构建过程中,进而领悟描述连续型随机变量概率分布的思想方法.

1 教材分析

正态分布这一内容在人教 A 版教材 2020 版选择性必修第三册(以下称“新教材”)和人教 A 版教材 2009 版选修 2-3(以下称“旧教材”)中的编排上有较大差异.首先,在引入上,新教材是先引入连续型随机变量的概念,再以现实生活中的检测产品误差作为背景问题引出正态分布,而旧教材是以学生不太熟悉的高尔顿板实验作为背景问题直接引出正态分布;其次,在定义上,新教材是通过钟形曲线及其对应的函数解析式,直接给出了正态分布的定义,而旧教材是通过积分来给出正态分布的定义;再者,在例题和习题的选取上,新教材更侧重于正态分布在实际生活中的应用.由此可见,新教材在编排上更充分地考虑了正态分布这一内容的抽象性和学生已有知识的局限性,因而,教师在进行教学设计时,应该立足于学生的最近发展区,并且应该充分利用信息技术让学生对这一内容有更具体的感知.

2 教学设计

2.1 创设情境 引发新知

教师活动:前面我们学习了离散型随机变量及其分布列,我们知道离散型随机变量的可能取值为有限多个或可以一一列举,分布列完全刻画了它的概率分布规律.但在现实生活中,还有很多随机变量不是离散型的,例如,周末放学时,A 同学的家长 16:10 到达校门口接他,而 A 同学预计在 16:10—16:30 之间到达校门口,定义随机变量 T 为该家长等待的时间(单位:分钟),则 T 的取值充满区间 $[0, 20]$,并且容易知道 $P(0 \leq T \leq 10) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.像这样,若随机变量的取值充满某个区间或整个实轴,且取一点的概率为 0,我们称这类随机变量为连续型随机变量.

设计意图:以贴近生活的实例引入连续型随机变量.

教师活动:显然,分布列不再适用于刻画连续型随机变量的概率分布规律,我们应该寻找新的数学工具来刻画,下面,我们结合一个具体问题一起来寻找.

问题 1 自动流水线包装的食盐,每袋标准质量为 400g.由于各种不可控制的因素,任意抽取一袋食盐,它的质量与标准质量之间或多或少会存在一定的误差(实际质量减去标准质量).用 X 表示这种误差,则 X 为连续型随机变量,如何刻画 X 的概率分布规律?

设计意图:选取贴近生活的情境素材,形成驱动性任务.

2.2 探究过程 生成新知

追问 (1) 要想刻画 X 的概率分布规律,我们需要先获取 X 的一些信息,应如何获取?

设计意图:预期学生能顺利回答“抽样获取样本数据”,此问题让学生回顾合理抽样获取样本数据是解决实际问题的第一步.

教师活动:检测人员在一次产品检验中,随机抽取了 100 袋食盐,获得误差 X (单位: g) 的 100 个样本数据如下(此处省略数据,为了在后面的教学环节能更方便的增加和使用数据,此 100 个样本数据利用 Excel 软件随机产生,并未使用教材上的数据).

追问 (2) 如何清晰直观地描述这 100 个样本数据的分布规律?

学生活动:预期部分学生能回答出“利用频率分布直方

图来描述”。

教师活动: 我们已学习过绘制频率分布直方图的方法和步骤, 在今天的课堂上, 我们直接利用 GeoGebra 软件来绘制. 教师利用 GeoGebra 软件绘制频率分布直方图如下:

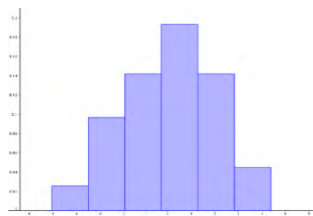


图1 样本量为 100

追问(3) 请结合频率分布直方图的特点描述这 100 个样本数据的分布规律.

学生活动: 样本数据大致对称地分布在 $X = 0$ 的两侧, 且小误差比大误差出现得更频繁.

设计意图: 此两个问题让学生回顾利用统计图表分析样本数据是解决实际问题的第二步.

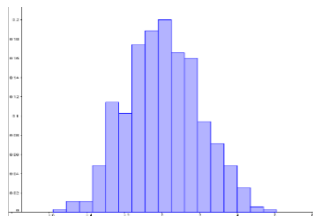


图2 样本量为 500

教师活动: 利用 Excel 软件增加样本数据至 500 个和 1000 个, 再利用 GeoGebra 软件分别绘制频率分布直方图.

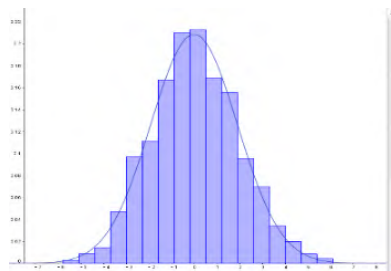


图3 样本量为 1000

追问(4) 样本数据增加后, 请大家观察并描述频率分布直方图的变化.

教师活动: 根据频率稳定到概率的原理, 当样本数据越来越多时, 频率分布直方图的轮廓越来越稳定, 接近一条光滑的钟形曲线(中间高、两边低、左右对称).

追问(5) 这条钟形曲线能否刻画 X 的概率分布呢?

学生活动: 教师引导学生思考能否利用钟形曲线求出 X 的取值落入某一区间的概率? 学生分小组讨论交流并请学生代表回答.

教师活动: 频率分布直方图中每个小矩形的面积表示 X 的取值落在相应区间内的频率, 所有小矩形的面积之和为 1. 而概率是频率的稳定值, 所以 X 的取值落在某一区间内的概率, 即为区间上方曲线与水平轴之间区域的面积. 曲线和 x 轴之间的区域面积为 1.

设计意图: 此两个问题让学生了解频率近似概率、样本估计总体是解决实际问题的第三步. Excel 和 GeoGebra 软件的使用方便了此教学过程的实现, 让学生能真正地参与到探究过程中并对这一环节有更形象具体的感知. 至此, 学生完成了正态分布模型的构建, 并领悟到了描述连续型随机变量概率分布的思想方法.

教师活动: 钟形曲线显然是函数的图像, 经过数学家的不懈努力, 找到了这类函数的解析式: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$. 其中 $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ 为参数. 我们称 $f(x)$ 为 X 的概率分布密度函数. 概率分布密度函数完全刻画了连续性随机变量的概率分布规律. 教师在此处适当介绍相关数学史.

生成新知: 我们称上述函数 $f(x)$ 为正态密度函数, 称它的图像为正态密度曲线, 简称正态曲线, 若随机变量 X 的概率分布密度函数为 $f(x)$, 则称随机变量 X 服从正态分布, 也叫高斯分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 特别地, 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 称随机变量 X 服从标准正态分布, 记为 $X \sim N(0, 1)$. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 X 的取值落在某一区间内的概率, 即为相应区间上方正态曲线与水平轴之间区域的面积.

2.3 合作交流 理解新知

问题 2 观察正态曲线并结合相应的正态密度函数, 你能得到正态曲线的哪些特征?

学生活动: 学生分小组讨论交流并请学生代表回答.

理解新知: 正态曲线有以下特征: (1) 曲线位于 x 轴上方, 与 x 轴不相交, 当 $|x|$ 无限增大时, 曲线无限接近 x 轴; (2) 曲线与 x 轴之间的面积为 1; (3) 曲线是单峰的, 它关于直线 $x = \mu$ 对称; (4) 曲线在 $x = \mu$ 处达到峰值 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

问题 3 一个正态分布完全由参数 μ 和 σ 确定, 这两个参数对正态曲线的形状有何影响? 它们反映正态分布的哪些特征?

学生活动: 学生分小组讨论交流并请学生代表回答.

教师活动: 借助 GeoGebra 软件动态演示并做适当说明.

理解新知: (1) 当 σ 一定时, 曲线的位置由 μ 确定, 曲线随着 μ 的变化而沿 x 轴平移, 参数 μ 反映了正态分布的集中位置; (2) 当 μ 一定时, 曲线的形状由 σ 确定, σ 越小, 曲线越“瘦高”, σ 越大, 曲线越“矮胖”, 参数 σ 反映了随机变量

的分布相对于 μ 的离散程度. 事实上, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$. 在实际问题中, 参数 μ 和 σ 可以分别用样本均值和样本方差来估计.

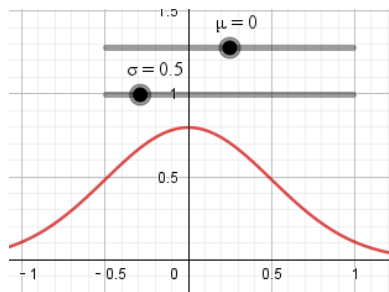


图 4

设计意图: 正态分布的均值和方差的计算需用到积分的知识, 此处不便严格计算, 借助 GeoGebra 软件的动态演示让学生形象地感知, 使学生不再被动接受.

问题 4 利用 GeoGebra 软件还可直接计算服从正态分布的随机变量取值落入某一区间的概率, 请大家观察以下概率的值有什么规律?

教师活动: 改变参数 μ 和 σ 的值, 利用 GeoGebra 软件分别计算概率 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ 、 $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$ 、 $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$, 学生观察.

理解新知: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 X 的取值落在三个特殊区间内概率是定值: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$. 通常认为服从于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机变量 X 只取 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 中的值, 这在统计学中称为 3σ 原则.

设计意图: 受所学知识的限制, 再次借助 GeoGebra 软件让学生猜想验证 3σ 原则.

2.4 回归生活 应用新知

例 1 李明上学有时坐公交车, 有时骑自行车. 他各记录了 50 次坐公交车和骑自行车所花的时间, 经数据分析得到: 坐公交车平均用时 30min, 样本方差为 36; 骑自行车平均用时 34min, 样本方差为 4. 假设坐公交车用时 X 和骑自行车用时 Y 都服从正态分布.

- (1) 估计 X, Y 的分布中的参数;
- (2) 根据 (1) 中的估计, 利用信息技术画出 X 和 Y 的分布密度曲线;
- (3) 如果某天有 38min 可用, 李明应选择哪种交通工具?

如果某天只有 34min 可用, 又应该选择哪种交通工具? 请说明理由.

例 2 已知我校高二年级期中考试数学成绩 X 近似地服从正态分布 $N(80, 400)$, 此次参加考试的总人数为 1287 人, 请问此次考试数学成绩在 100 分以上 (含 100 分) 和 40 分以下 (含 40 分) 的学生各约有多少人?

设计意图: 例 1 选自于教材, 让学生尝试利用 GeoGebra 软件作图并作答; 例 2 是根据我校实际情况改编的例题, 可激发学生的探究兴趣. 这两个实际问题的选取意在让学生感受正态分布在实际生活中的应用, 培养学生的逻辑推理和数学建模的核心素养.

3 教学反思

深度学习让学生的成长从提高“解答试题的能力”转向提高“解决问题的能力”, 进而转向提高“做事的能力”, 所以教学要改变从前“去问题化”的模式, 实现解决问题的教学、生成问题的教学^[1]. 基于此, 本教学设计在课堂实施时取得了较好的效果. 首先, 贴近生活的情境素材和例题的选取形成驱动性任务吸引学生主动学习、促进学生的核心素养发展; 其次, 立足于学生最近发展区的问题链的设计引发了学生的深度思考, 实现了学习过程中的深度互动, 让学生真正参与到了正态分布模型的构建中, 并领悟到了描述连续型随机变量概率分布的思想方法: 抽样获取样本数据—利用统计图表分析样本数据—频率近似概率、样本估计总体—得到总体的概率分布密度曲线; 再者, 信息技术的恰当运用优化了教学的效果, Excel 和 GeoGebra 软件的使用有效突破了正态分布这一内容的抽象性和学生已有知识的局限性, 使得正态分布模型的探究过程能够丰富地展开. 总之, 教师在进行教学设计时, 要思考如何增强学习过程的体验性、互动性、生成性, 促使深度学习的发生, 进而培养学生的学科核心素养.

参考文献

- [1] 刘月霞, 郭华. 深度学习: 走向核心素养 [M]. 北京: 教育科学出版社, 2018.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [3] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书 A 版·数学 (选择性必修第三册) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [4] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中课程标准实验教科书 A 版·数学 (选修 2-3) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2009.