

对一道高三统测试题争议性解法的思考

安徽省芜湖市第一中学 张 灿 刘海涛 (邮编:241000)
安徽师范大学附属外国语学校城东分校 王 娇 (邮编:241000)

摘 要 从一道高三统测题的两种解法引出对随机变量是不是特殊分布列的思考,通过对问题背景的分析、概念的比较以及举反例等方法,得出随机变量既不服从二项分布也超几何分布,但与超几何分布有密切的联系,从而解释了解法 2 结果正确的合理性.

关键词 争议性解法;二项分布;超几何分布;数学期望

安徽省芜湖市 2022 年 1 月高三统测理科数学第 19 题如下:

某班共有 9 位班干,由于在周末临时接到学校通知,需要对班级的一项活动方案做出讨论表决,按规定至少需要 $\frac{2}{3}$ 的班干参加,于是班主任和团支部书记分别独立、随机地给 5 位班干发通知信息.假设所发信息都能收到,记班干中能收到班主任或团支部书记信息通知的人数为 X (注:班主任不需发给团支部书记).

(1)求班长能收到班主任或团支部书记所发通知信息的概率;

(2)求 X 的期望.

其中,第(1)问不难作答(答案: $\frac{55}{64}$),此处从略.而第(2)问,则出现了两种截然不同的求解方法.

解法 1 借助古典概型计算相应的概率,根据分布列求出 X 的期望.

由于班主任和团支部书记分别独立、随机地给 5 位班干发通知信息,所以基本事件总数为: $C_8^5 \cdot C_3^5$, X 的可能取值为 5, 6, 7, 8.

$$P(X=5) = \frac{C_8^5 \times C_3^5}{(C_8^5)^2} = \frac{1}{56}, P(X=6) = \frac{C_8^5 \times C_3^4 \times C_3^1}{(C_8^5)^2} = \frac{15}{56},$$

$$P(X=7) = \frac{C_8^5 \times C_3^3 \times C_3^2}{(C_8^5)^2} = \frac{30}{56}, P(X=8) =$$

$$\frac{C_8^5 \times C_3^2 \times C_3^3}{(C_8^5)^2} = \frac{10}{56}.$$

由此可得 X 的分布列:

X	5	6	7	8
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

$$\text{所以, } X \text{ 的期望 } E(X) = 5 \times \frac{1}{56} + 6 \times \frac{15}{56} + 7 \times \frac{30}{56} + 8 \times \frac{10}{56} = \frac{55}{8}.$$

解法 2 先判定 X 服从二项分布,再根据二项分布的期望公式求出 $E(X)$.

把每个人是否接收到班主任或团支部书记的通知信息看做一次伯努利试验,由(1)知,一次试验“成功”(接收到信息)的概率 p 均为 $\frac{55}{64}$. 本题涉及到 8 位班干,相当于进行了 8 次独立重复试验;而 X 指收到信息通知的人数,相当于 8 次独立重复试验中出现“成功”的次数,因此 X 服从参数为 $n=8, p=\frac{55}{64}$ 的二项分布,即 $X \sim B(8, \frac{55}{64})$,故 X 的期望 $E(X) = 8 \times \frac{55}{64} = \frac{55}{8}$.

在阅卷过程中,笔者所在学校学科组所有教师对“解法 1”均没有异议,这也是命题组提供的参考解答.但是,对于“解法 2”,则存在较大的争议,很多教师认为,“解法 2”思路正确、过程简洁;也有教师认为,“解法 2”的思路是错误的,但说不

基金项目:芜湖市 2022 年度教育科学研究课题“基于 SOLO 理论的发展学生数学核心素养的实践研究”(课题编号:JK22019),“‘双减’背景下促进核心素养发展的数学实验教学实践与研究”(课题编号:JK22062)

清楚错因何在,同时无法解释为什么最终结果(X 的期望值)又是正确的.对此,笔者进行了研究与思考,现将过程概述如下,与同行交流.

思考一 随机变量 X 究竟是否服从二项分布?

若 $X \sim B(n, p)$, 则 $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n)$. 按照“解法 2”, 由 $X \sim B(8, \frac{55}{64})$ 得, $P(X = k) = C_8^k (\frac{55}{64})^k (\frac{9}{64})^{8-k} (k=0, 1, 2, \dots, 8)$, 而事实上, 变量 X 根据实际意义只能取到 5, 6, 7, 8 这 4 个值, 换句话说, $X=0, 1, 2, 3, 4$ 时的概率全为 0, 与根据二项分布的概率公式所得结果根本不符, 即便 $X=5, 6, 7, 8$ 时的概率也是如此. 可见, “解法 2” 中“ X 服从二项分布”这个判断是错误的.

二项分布的背景是独立重复试验, 在 n 次独立重复试验中, 每次试验的“成功概率”是相等的, 但反之并不成立. 具体到本题, 不能由“单次试验的成功概率均为 $\frac{55}{64}$ ”得出“8 次试验是独立的, 可重复的”, 可举反例说明: 假如 8 次试验是独立的, 那么 8 次试验均未成功的概率($=0$)应该等于每次试验均未成功($=\frac{9}{64}$)的概率之积, 而这显然是不成立的. 对二项分布概念的理解不准确, 就是“解法 2”出现判断错误的根本原因.

思考二 随机变量 X 究竟是否服从超几何分布?

我们知道, 二项分布与超几何分布有区别、也有联系, 特别是: 超几何分布的极限就是二项分布; 在对应同一个摸球模型中, 超几何分布与二项分布的数学期望是相等的. 由此想到, 本题中, “解法 2”计算结果的正确会不会是因为 X 真正服从的是超几何分布呢?

根据定义, 判断某概率分布是否属于超几何分布, 必须抓住以下几点: 首先, 试验对象应该是总数为 N 件的“物品”, 且可以明确地分为甲、乙两类, 其中甲类有 M 件($M < N$), 从而乙类有 $N-M$ 件; 其次, 试验过程应该是从所有 N 件“物品”中随机地取出 n 件; 最后, 随机变量 X 应该是指这 n 件中所含甲类“物品”数(或乙类“物品”

数).

本题中, 所有试验对象显然是“8 位班干”($N=8$), 而随机变量 X 的定义是“8 班干中能收到班主任或团支部书记信息通知的人数”, 由于试验过程是“班主任和团支部书记分别独立、随机地给 5 位班干发通知信息”, 因此, X 的最大值应该是 8, 这样, 甲类“物品”至少有 8 件(即 $M \geq 8$), 又 $M < N=8$, 显然矛盾, 故随机变量 X 也不可能服从超几何分布.

思考三 能否构造随机变量 Y , 使得 $X = f(Y)$ 且 Y 服从超几何分布?

答案是肯定的.

例如, 可以根据“是否收到班主任信息”, 将“8 位班干”($N=8$)分为甲、乙两类, 甲类是“未收到班主任信息的班干”($M=3$), 乙类是“收到班主任信息的班干”; 而“团支部书记随机发信息”相当于从“8 位班干”中随机抽取 5 位($n=5$), 构造随机变量 Y , Y 指的是“抽到甲类的人数(甲类中收到团支部书记信息的人数)”, 则 Y 服从超几何分布, 即 $Y \sim H(5, 3, 8)$, 且 $X = 5 + Y$. 根据超几何分布的期望公式, $E(Y) = n \times \frac{M}{N} = 5 \times \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$, 故 $E(X) = 5 + E(Y) = \frac{55}{8}$.

上述模型中, 若 Y 指的是“抽到乙类的人数(乙类中收到团支部书记信息的人数)”, 即 Y 指的是“既收到班主任信息又收到团支部书记信息的人数”, 则“仅收到班主任信息的人数”为 $(5-Y)$, “仅收到班主任信息的人数”也为 $(5-Y)$, 则“收到班主任或团支部书记信息的人数”为 $(5-Y) + (5-Y) + Y = 10 - Y$, 从而有 $X = 10 - Y$, 又 $Y \sim H(5, 5, 8)$, 故 $E(X) = 10 - E(Y) = 10 - 5 \times \frac{5}{8} = \frac{55}{8}$.

由此可见, “解法 2”在错误判断“ X 服从二项分布”的情况下, 仍然能够获得正确的结果, 并非偶然, 其中隐含着超几何分布的数学期望的计算. 这也启示我们, 准确把握、真正理解各种概率模型的背景本质与内在联系, 无论对于教师的教还是对于学生的学, 都具有十分重要而深远的意义和价值.

(收稿日期: 2022-10-31)