二项分布与超几何分布模型识别问题

陈泽刚　杜海洋

（四川省成都经济技术开发区实验中学校）

在教材和考题中常涉及二项分布与超几何分布，有时，学生不能很好地理解这两种模型的定义，一遇到“取”或“摸”的题型，就认为是超几何分布，不加分析，滥用公式，运算对象不明晰.事实上，超几何分布和二项分布确实有着密切的联系，但也有明显的区别，下面笔者通过对两种分布进行分析并举例加以说明.

1　基本概念

1.1　超几何分布

一般地，在含有 M 件次品的 N 件产品中，任取 n 件，其中恰有 X 件次品，则事件 $\{X=k\}$ 发生的概率为

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k=0,1,2,3,\cdots,m,$$

其中，$m=\min\{M,n\}$ 且 $n\leqslant N$，$M\leqslant N$. $n,M,N\in\mathbf{N}^*$ 为超几何分布，如果一个变量 X 的分布列为超几何分布列，则称随机变量 X 服从超几何分布，且

$$E(X)=n\cdot\frac{M}{N}.$$

1.2　二项分布

在 n 次独立重复试验中，设事件 A 发生的次数为 X，在每次试验中，事件 A 发生的概率为 P，那么在 n 次独立重复试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,3,\cdots,n),$$

此时称随机变量 X 服从二项分布.记作：

$$X\sim B(n,p),\ E(X)=np.$$

1.3　“二项分布”与“超几何分布”的联系与区别

1)“二项分布”所满足的条件：在每次试验中，事

表 1

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$$E(\xi)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{11}{6}.$$

(2)设运行“归零”程序中输出 $n(0\leqslant n\leqslant k-1)$ 的概率为 P_n，则

$$P_n=P_{n+1}\times\frac{1}{n+1}+P_{n+2}\times\frac{1}{n+2}+P_{n+3}\times\frac{1}{n+3}+\cdots+P_{k-1}\times\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k},$$

故当 $0\leqslant n\leqslant k-2$ 时，

$$P_{n+1}=P_{n+2}\times\frac{1}{n+2}+P_{n+3}\times\frac{1}{n+3}+\cdots+P_{k-1}\times\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}.$$

以上两式作差，得 $P_n-P_{n+1}=P_{n+1}\times\frac{1}{n+1}$，则 $P_n=P_{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}$，所以

$$P_{n+1}=P_{n+2}\times\frac{n+3}{n+2},$$

$$P_{n+2}=P_{n+3}\times\frac{n+4}{n+3},$$

$$\cdots$$

$$P_{k-2}=P_{k-1}\times\frac{k}{k-1},$$

所以 $P_nP_{n+1}P_{n+2}\cdots P_{k-1}=P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}\cdots P_{k-1}\times\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n+3}{n+2}\times\frac{n+4}{n+3}\times\cdots\times\frac{k}{k-1}$，

化简得 $P_n=P_{k-1}\times\frac{k}{n+1}$.

而 $P_{k-1}=\frac{1}{k}$，所以 $P_n=\frac{1}{n+1}$.又当 $n=k-1$ 时，$P_n=\frac{1}{n+1}$ 也成立.故 $P_n=\frac{1}{n+1}(0\leqslant n\leqslant k-1)$.

点评　先理解“归零”程序，运行该程序得到输出 $n(0\leqslant n\leqslant k-1)$ 的概率 P_n 的关系式，然后递推得到 P_{n+1} 的关系式，再通过作差、相乘等方法进行变形转化，最终求得 P_n.本题抽象程度较高，解答本题需要有较强的阅读理解能力和变形转化能力.

（完）

件发生的概率是相同的;是一种有放回抽样,各次试验中的事件是相互独立的;每次试验只有两种结果,事件要么发生,要么不发生;随机变量是这 n 次独立重复试验中事件发生的次数.

2)“超几何分布”的本质:在每次试验中某一事件发生的概率不相同,是不放回抽样.当样本容量很大时,超几何分布近似于二项分布.

3)“二项分布”和“超几何分布”是两种不同的分布,但其期望是相等的,即把一个分布看成是“二项分布”或“超几何分布”时,它们的期望是相同的.事实上,对于“超几何分布”,若 $p=\frac{M}{N}$,则

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}k\cdot\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}=n\cdot\frac{M}{N}.$$

“超几何分布”和“二项分布”的这种“巧合”,使得“超几何分布”期望的计算大大简化.

共同点:每次试验只有两种可能的结果:事件发生或事件不发生.

不同点:a) 超几何分布是不放回抽样,二项分布是有放回抽样. b) 超几何分布需要知道总体的容量,二项分布不需要知道总体容量,但需要知道“成功率”.

联系:当总体的容量很大时,超几何分布近似于二项分布.

2 典型例题

例1 袋中有8个白球和2个黑球,从中随机连续抽取3次,每次取1个球.求:

(1)有放回抽样时,取到黑球的个数 X 的分布列;

(2)不放回抽样时,取到黑球的个数 Y 的分布列.

解析 (1)有放回抽样时,取到的黑球个数 X 可能的取值为0,1,2,3.又由于每次取到黑球的概率均为 $\frac{1}{5}$,3次取球可以看成3次独立重复试验,则 $X\sim B(3,\frac{1}{5})$.所以

$$P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{5})^0\times(\frac{4}{5})^3=\frac{64}{125},$$

$$P(X=1)=C_3^1(\frac{1}{5})^1\times(\frac{4}{5})^2=\frac{48}{125},$$

$$P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{5})^2\times(\frac{4}{5})^1=\frac{12}{125},$$

$$P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{5})^3\times(\frac{4}{5})^0=\frac{1}{125}.$$

因此,X 的分布列如表1所示.

表1

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

(2)不放回抽样时,取到的黑球个数 Y 可能的取值为0,1,2,且有

$$P(Y=0)=\frac{C_2^0C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15},$$

$$P(Y=1)=\frac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15},$$

$$P(Y=2)=\frac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}.$$

因此,Y 的分布列如表2所示.

表2

Y	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

点评 利用两种分布的不同点,即超几何分布是不放回抽取,二项分布是有放回抽取,容易使问题获解.

例2 在10件产品中,有3件一等品,4件二等品,3件三等品,从这10件产品中任取3件,求:

(1)取出的3件产品中一等品件数多于二等品件数的概率;

(2)记 X 表示“取出的3件产品中一等品件数多于二等品件数的数量”,求 X 的分布列并求 $E(X)$.

解析 由题可知:从10件产品中分别任取两次得到一等品或二等品的概率是不相等的,这是一种不放回抽样,随机变量 X 服从超几何分布.

(1)设取出的3件产品中一等品件数多于二等品件数为事件 A,记事件 A_1:取出3件一等品;事件 A_2:取出2件一等品和1件三等品;事件 A_3:取出1件一等品和2件三等品.由于 A_1,A_2,A_3 互斥,且 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$,即

$$P(A_1)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120},$$

$$P(A_2)=\frac{C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{40},$$

$$P(A_3)=\frac{C_3^1C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{40},$$

所以 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{31}{120}$.

（2）$X=0,1,2,3$；X 服从超几何分布，所以 $P(X=0)=P$（1 件一等品，1 件二等品，1 件三等品）$=\frac{C_3^1C_4^1C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$；$P(X=1)=P$（2 件一等品，1 件二等品）$=\frac{C_3^2C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{10}$；$P(X=2)=P$（3 件一等品，1 件二等品）$=\frac{C_3^3C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{30}$；$P(X=3)=P$（3 件一等品，0 件二等品）$=\frac{C_3^3C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{120}$.

因此，X 的分布列如表 3 所示.

表 3

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{120}$

$$E(X)=\frac{nM}{N}=\frac{3\times3}{10}=0.9.$$

点评　谨防错误地认为随机变量 X 服从二项分布，即 $X\sim B(3,\frac{31}{120})$.

例 3　从某高中学校随机抽取 16 名学生，经校医检查得到每位学生的视力，其中“好视力”4 人，用这 16 人的样本数据来估计整个学校的整体数据，若从该校（人数很多）任选 3 人，记 X 表示抽到“好视力”学生的人数，求 X 的分布列及数学期望.

解析　本题就是从“该校（人数很多）任选 3 人”，由此得到“好视力”人数 X，若每次从该校任取一名学生为“好视力”这一事件的概率显然是相等的，因为该校“人数很多”相当于“有放回抽样”，因此，随机变量 X 服从二项分布而不是超几何分布.

由题可知 $X=0,1,2,3$，由样本估计总体，每次任取一人为“好视力”的概率为 $P=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，则 $X\sim B(3,\frac{1}{4})$，所以

$$P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{4})^0(1-\frac{1}{4})^3=\frac{27}{64},$$

$$P(X=1)=C_3^1(\frac{1}{4})^1(1-\frac{1}{4})^2=\frac{27}{64},$$

$$P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{4})^2(1-\frac{1}{4})^1=\frac{9}{64},$$

$$P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{4})^3(1-\frac{1}{4})^0=\frac{1}{64}.$$

因此，X 的分布列如表 4 所示.

表 4

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

$$E(X)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

点评　假设问题变为：“从 16 名学生中任取 3 名，记 X 表示抽到‘好视力’学生的人数，求 X 的分布列及数学期望.”那么 X 服从超几何分布，即 $P(X=k)=\frac{C_4^kC_{12}^{3-k}}{C_{16}^3}$（$X=0,1,2,3$），其中，数学期望值不变，即 $E(X)=3\times\frac{4}{16}=\frac{3}{4}$.

例 4　写出下列离散型随机变量的分布列，并指出其中服从二项分布的是哪些？服从超几何分布的是哪些？

（1）X_1 表示 n 次重复抛掷 1 枚骰子出现点数是 3 的倍数的次数；

（2）有一批产品共有 N 件，其中 M 件为次品，采用不放回抽取方法抽 n 件，出现次品的件数为 X_2（$N-M>n>0$）.

解析　（1）X_1 的分布列如表 5 所示.

表 5

X_1	0	1	2	…	n
P	$C_n^0(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^n$	$C_n^1(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^{n-1}$	$C_n^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^{n-2}$	…	$C_n^n(\frac{1}{3})^n$

因此，$X_1\sim B(n,\frac{1}{3})$.

（2）X_2 的分布列如表 6 所示.

表 6

X_2	0	1	…	k	…	n
P	$\frac{C_{N-M}^n}{C_M^n}$	$\frac{C_M^1C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	…	$\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$	…	$\frac{C_M^n}{C_N^n}$

因此，即 X_2 服从超几何分布.

点评　超几何分布的抽样是不放回抽取，各次抽取不独立，二项分布的抽样是有放回抽取，各次抽取相互独立.当超几何分布所对应的总体数量很大时可以近似地看作二项分布.

通过以上几例得出，二项分布模型和超几何分布模型最主要的区别在于是有放回抽样还是不放回抽样.因此，在解有关二项分布和超几何分布问题时，仔细阅读、辨析题目条件是非常重要的.

（完）