



【课堂聚焦·教材教法】

追寻教学内容的内在价值

——以“正态分布”教学研究为例

范世祥

(江苏省太仓高级中学, 江苏太仓 215411)

【摘要】正态分布是概率论中最重要的连续型概率模型。高中教材“正态分布”这一节的内容属于非高考热点,是许多教师不太重视且畏难的课题。而正态分布在概率统计理论和实际应用中却占有重要的地位。研究者以“正态分布”教学研究为例,对内容解析与课堂定位、教材中关于素材的处理进行探究,并给出教学思考和建议。

【关键词】正态分布;教学价值;数学文化;数学美

正态分布是概率论中最重要的连续型概率模型。由于《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》不要求对一般的连续型随机变量及其分布进行讨论,因此在高中阶段,我们只研究服从正态分布的连续型随机变量。但受到知识的限制,正态分布的许多结论无法严格证明或直接用于计算,从而给教师的教学和学生的学习带来一定的困难,往往出现一带而过的教学现象。为挖掘该课题的内在教学价值,笔者深入研究教学内容,结合自身教学实践,谈谈对于这一课题的认识与思考。

一、内容解析与课堂定位

1. 内容解析

正态分布是概率论中最重要的一种分布,主要体现在以下两个方面。一方面,正态分布是最常见的一种分布,例如测量的误差、射击时弹的落点、人的生理特征指标(如身高、体重)、自动流水线生产的各种产品的质量指标(如零件的尺寸、袋装食盐的质量)等,都近似服从正态分布;另一方面,正态分布有许多性质,很多分布可用正态分布来近似,在统计中一些重要的分布可以通过正态分布来

导出。

从教材的内容安排看,“正态分布”是随机变量及其分布的最后一节。从本章整个知识框架来看,该章节首先介绍了随机变量的概念,然后通过两点分布、二项分布、超几何分布等具体实例,重点研究了离散型随机变量及其分布列,以及离散型随机变量的均值与方差。而正态分布是一种连续型随机变量的分布,并且正态分布是二项分布的极限,所以很自然地被安排在本章的最后一节。

从知识层面看,本节课需要用到学生已学的知识。例如:统计方面关于数据处理分析的知识;随机变量及其分布列、离散型随机变量的均值与方差、二项分布等知识;函数的单调性、图象对称性、指数函数、二次函数、复合函数等知识。

从当代的科学发展看,统计学作为应用数学的一个分支几乎渗透到各个科学领域,例如:社会发展与评价、持续发展与环境保护、资源保护与利用、电子商务、保险精算、金融业数据库建设与风险管理、宏观经济监测与预测、政府统计数据收集与质量保证、分子生物学中的统计方法、高科技农业研究中的统计方法、生物制药技术中的统计方

【作者简介】范世祥,一级教师,苏州市学科带头人,姑苏教育青年拔尖人才,主要研究方向为高中数学课堂教学研究。

【基金项目】2020年江苏省基础教育前瞻性教学改革实验项目“指向理性精神培育的数学创新实验课程研究”(2020JSQZ0146)



法、流行病规律研究与探索的统计方法、人类染色体工程研究中的统计方法、质量与可靠性工程等。

因此，正态分布是一个承上启下的课题，不仅给学生提供了丰富的数学知识，而且给学生开启一扇窗户，让他们看到精彩纷呈的科学世界。

2. 课堂定位

从本节课的教学内容来看，教学重点是正态分布的概念及性质，教学难点是正态分布概念的形成与理解。尤其是正态分布密度函数解析式的出现，无论是学生还是教师，都觉得这个解析式过于高深，难以理解。

然而从正态分布在数学中的地位以及正态分布的发展历史来看，本节内容包含了重要的应用价值与文化价值。正态分布这一节课，如果轻视它，从学生的短期利益来看无伤大雅；但如果能重视它，从学生的终身成长来看却受益匪浅。因此，笔者认为，本节课可定位于数学文化课与研究课。学生通过对正态分布相关知识的学习，了解正态分布的发展历程，认识统计学的重要性及其应用的广泛性，体会数学的博大精深与数学的美，培养研究能力，提升学科素养。

二、教材中关于素材的处理研究

1. 引入的对比与分析

梳理国内的几套新旧普通高中数学教材，各版本的教材对“正态分布”的引入方式大体可以分成两种。第一种方式从具体实例出发，通过描述误差数据的分布引入，引导学生认识误差随机变量的取值不能一一列举，不能用分布列。以新人教A版高中数学教材为例，教材提供了100袋袋装食盐的质量误差数据，将其看成对误差变量 X 的100次观测值，接着教材给出以下思考：①如何描述这100个样本误差数据的分布？②如何构建适当的概率模型刻画误差 X 的分布？通过思考题的引导，引发学生的认知冲突：之前如何刻画连续型随机变量的概率分布？进而自然地引出课题。第二种方式是借助计算机模拟，从具体实验出发引出课题。以旧人教A版高中数学教材为例，教材以高尔顿钉板的演示作为引入。在问题的引导下，利用所学的统计学知识让学生进行数据处理：从频率分布直方图到频率分布折线图，再到总体密度曲线，引出正态分布的密度曲线，使学生历经从离散型到连续型的过渡，形

成对正态分布最直观、最初步的认识。

2. 内容的生成与处理

本节课的内容主要分为两个部分：第一部分是正态分布概念的形成；第二部分是正态曲线的性质探究及应用。对于第二部分，从正态分布密度函数解析式出发，利用函数知识并结合数学软件等工具，让学生获得正态曲线的特点并能利用 3σ 原则解决相关问题。

正态分布的概念有三个层面：第一个层面是直观层面，钟形曲线就是（或近似地是）正态曲线；第二个层面是从实例的特征（众多的、互不相干的、不分主次的偶然因素作用结果之和）理解怎样的随机变量服从或近似服从正态分布；第三个层面是

正态分布密度函数 $\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

的获得，这一层面恰恰是学生感到最为困惑的，因为学生无法理解这个复杂的解析式是怎么来的。如何使正态分布的概念生成更为自然，让学生更清晰、准确地理解正态曲线的特点，笔者尝试从以下视角带领学生赏析。

(1) 历史视角看曲线

正态分布也称为高斯分布，因此很多学生都误以为正态分布是高斯发现的，但事实并非如此，不过高斯对于正态分布历史地位的确立是起到了决定性的作用。发现正态分布的主角是棣莫弗（De Moivre）和拉普拉斯（Laplace）。1733年，法国数学家棣莫弗利用 $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ 这一公式 [此为斯特林（Stirling）公式，棣莫弗首先发现后由斯特林加以改进] 在研究二项分布 $B(n, \frac{1}{2})$ 时，得到了正态

分布的密度函数 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ；1774年，拉普拉

斯证明了 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ ，之后拉普拉斯把二项分

布的正态近似推广到任意 p 的情况，并得到了棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理。19世纪初，高斯基于最小二乘理论研究统计误差的概率密度分布。高斯既提出了极大似然估计的思想，又解决了误差的概率密度分布的问题，这项工作对后世的影响很大，因此，正态分布也被称为高斯分布。高斯在数学上建树颇多，去世前他要求给自己的墓碑上雕刻上正



十七边形（高斯尺规作图的得意之作）。而后世的德国马克的钞票和硬币上却是以正态密度曲线来纪念高斯，这足以说明高斯的这项工作在当时科学发展中的作用。正态分布的下一个推动力来自生物学家高尔顿，高尔顿是生物统计学派的奠基人，1877年，高尔顿设计了高尔顿钉板的装置，模拟正态分布的性质用于解释遗传现象。从1733年棣莫弗的工作为开端，到20世纪中前期，正态分布及其相关理论陆续被发现、完善并创建起来。^[1]

(2) 函数视角看曲线

教师请学生研究函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

的奇偶性、单调性、最大值等，旨在通过复习高中数学必修一中函数的单调性、图象对称性、指数函数、二次函数、复合函数等知识，实现对函数解析式 $\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的深入理解，进而让学生掌握正态分布密度曲线的特点。

(3) 概率视角看曲线

①曲线与 x 轴之间的面积为1。

②当 σ 一定时，曲线随着 μ 的变化而沿 x 轴平移，如图1甲所示。

③当 μ 一定时，曲线的形状由 σ 确定，如图1乙所示。

σ 越大，曲线越“矮胖”，总体分布越分散； σ 越小，曲线越“瘦高”，总体分布越集中。

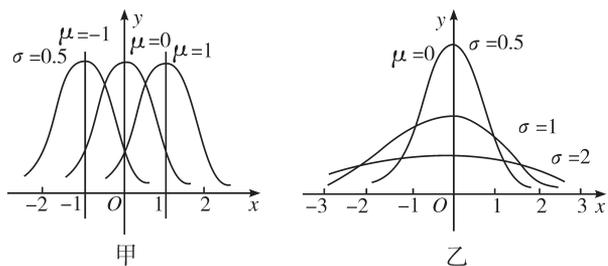


图1

④3σ原则

正态变量在区间 $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$, $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 内，取值的概率分别是68.3%，95.4%，99.7%；正态变量在 $(-\infty, +\infty)$ 内的取值的概率为1，在区间 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的取值的概率是0.3%，故正态变量的取值几乎都在距 $x = \mu$ 三倍标准差之内，这就是正态分布的3σ原则。

(4) 美学视角看曲线

当正态分布密度函数 $\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,

$x \in (-\infty, +\infty)$ 很自然地一步步呈现出来时，学生既可以从中感受到数学家探索知识的伟大过程，还可以欣赏这个解析式内在的数学美。这个式子完美地包含了数学中的“五朵金花”：圆周率 π 、自然对数的底数 e 、最小质数的算术平方根 $\sqrt{2}$ 、均值 μ 、标准差 σ 。从感受正态曲线的形态美到函数解析式的数字美，这对学生多角度欣赏数学的美，领略数学的魅力，提高数学的美学修养起到积极的作用。

综上所述，本节课从结构上是“一条线索”——从随机误差试验的探究出发；从内容上有“两个板块”——正态分布的概念、正态曲线的性质与应用。在正态分布概念的认识上有“三个层面”——图形、特征、密度函数。前两个层面直观、具体，第三个层面则因为解析式比较抽象，学生较难理解。从贯穿教材及正态分布发展史上看有“三个人物”——高尔顿、棣莫弗、高斯。从数学的美感看，最后盛开的是“五朵金花”—— π , e , $\sqrt{2}$, μ , σ 。如果广大一线教师能正确地理解和把握这些内容，那么对于这节课的教与学有重要的作用。

三、思考与启发

1. 教学思考寻本质

教师用书建议本节课为一课时，但在一个课时内让学生既掌握正态分布的相关知识，又能从中感受到其中所蕴含的丰富文化历史背景，显然是比较困难的。笔者曾听过麻省理工学院的一节公开课《正态分布、均匀分布和指数分布》，该教授没有一板一眼地进行推导公式，而是把大量的时间花在了计算机模拟骰子试验，谈其方法与思想。还有其他一些国外知名大学的视频课程，这些教授对于具体的定义、定理、例题讲得很少，而相关的思想、方法、历史讲得比较多。对于具体的定义、定理、例题等，不同版本的教材、不同教师的讲授，都是大同小异，学生完全可以自学。然而这些知识的建立过程及背后的思想和方法，对于学生深刻掌握知识

(下转第49页)



125页看起。以上两种错误解答，第①种是因为理解题意错误导致。学生习惯性地从条件出发，按照“整体中去掉一部分”的减法思路进行思考，解答成“求剩下多少页”。第②种是对题中蕴含的信息理解不透彻。学生只求出了第一天和第二天一共看的页数。此时，教师可根据学生的错误解答，引导学生反思：“如果能让以上解答正确，原题应该如何设计？”学生以错为引，以式引题，设计了如下改编题。

①一本书有219页，小明打算三天看完，第一天看了67页，第二天看了58页，第三天还要看多少页？

②一本书有219页，小明打算三天看完，第一天看了67页，第二天看了58页，小明前两天一共看了多少页？

教师及时引导学生进行辨析、反思，让学生思考以上两道改编题与原题有什么不同。学生通过比较发现，两种解答都与原题不符，而第②道改编题与原题仅差一步。教师引导学生理解问题“第三天应从第几页看起”是建立在第一天和第二天一共看了多少页基础之上的，与“一本书219页”并无关联，解题时应剔除“219页”这条干扰信息。

面对这种具有生活化情境和挑战性的习题，教师应沿着学生解题时出现的错误，引导学生反思，据错编题，提高学生对数学问题和题目信息的深入解读能力。学生经过比较、分析、反思后，会清楚地认识到自己思维的“盲区”，进而学会辨别、筛选题目信息，有利于提高自主学习、自我监控和自我调节的能力。

总而言之，数学教师应正确认识数学错题的讲评功能，加强数学作业管理的改进与革新，讲究讲评策略，激发学生的学习兴趣，引发学生的自主学习，触发学生的高阶思维活动，使学生在错题讲评的学习活动中掌握所学知识，发展数学思维，提升思维品质，培养关键能力，培育核心素养。

参考文献：

- [1] 吴维斌. 基于核心活动的数学作业讲评模式思考与实践[J]. 小学数学教育, 2021(1): 34-36.
- [2] 李雪峰. “双减”目标下小学数学思维型作业的设计策略[J]. 小学教学设计, 2022(2): 78-82.
- [3] 钱丽. “对对碰”游戏进阶助推学生的深度学习：以“分数的基本性质”教学为例[J]. 中小学课堂教学研究, 2021(6): 38-39, 70.

(责任编辑：罗小荧)

(上接第41页)

和创新能力的培养至关重要。

如何利用好这节课的文化价值，笔者建议可以布置研究性学习的任务，先让学生搜集正态分布的起源、发展、应用等相关数学素材，再分组合作写成研究报告，最后选择一些出色的小组报告在课堂上给全班学生做展示。这样可以更好地帮助学生认识正态分布，对他们今后进入高等院校后的学习具有重要作用。

2. 提高站位寻价值

《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》指出，数学是人类文化的重要组成部分，高中数学课程应提倡数学的文化价值。笔者认为这节课的价值在高考之外，教师应认真对待这节课，开阔学生的视野，有效提升学生的数学素养，同时也可以促进教师的专业发展^[2]。

在高中阶段，教师面对“正态分布”这样一些高考要求不高的课题时，往往表现出畏难情绪或松

懈的感觉，有时会采取习题教学的方式对待。事实上，仔细阅读教材内容，我们会发现许多紧跟时代、紧跟最新科技发展的教学素材，并且教材中几乎所有的章节都精心设计了“探究与发现”“阅读与思考”等板块，对相关内容进行多层面的拓展。如果教师在日常的教学认真对待这些板块，放手让学生多做一些研究，认真钻研，相信会迎来一个不一样的数学世界和教学生态。

因此，教师应该要转变观念，基于学生核心素养的培养，立足教材内容，开阔学生视野，充分挖掘教学内容背后的价值和本质，才能真正为拔尖创新人才的培养贡献力量。

参考文献：

- [1] 陈希孺. 数理统计学简史[M]. 长沙：湖南教育出版社，2002.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）[M]. 北京：人民教育出版社，2020.

(责任编辑：陆顺演)