二项分布中概率最大值理论及其应用

杨亭亭

（山东省淄博市沂源县第一中学）

一般地，在 n 次独立重复试验中，设事件 A 发生的次数为 X，在每次试验中事件 A 发生的概率为 p，则 $P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$，此时称随机变量 X 服从二项分布，记作 $X\sim B(n,p)$.结合二项分布的概念可知随机变量 X 的可能取值为 $0,1,2,\cdots,n$，那么 X 取何值时对应的概率最大呢？这是本文着重解决的一个问题，并通过举例加以具体说明，在解题中灵活运用概率最大值理论有利于帮助我们快速、准确解题（主要是选择题或填空题，对于解答题可检验所得结论是否正确）.

1　二项分布中概率最大值理论

一般求解思路：设 $X=k$ 时，对应概率最大，则应满足 $\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\\P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\end{cases}$ 然后通过求解该不等式组，结合 k 的取值范围即可确定 k 的具体取值.

现在，我们从单调性的角度出发，探究概率最大值理论.因为

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{\mathrm{C}_n^{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}}=\frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)},$$

所以令 $P(X=k+1)>P(X=k)$，则 $(n-k)p>(k+1)(1-p)$，解得 $k<(n+1)p-1$.

若令 $P(X=k+1)=P(X=k)$，则有 $(n-k)p=(k+1)(1-p)$，解得 $k=(n+1)p-1$.

若令 $P(X=k+1)<P(X=k)$，则有 $(n-k)p<(k+1)(1-p)$，解得 $k>(n+1)p-1$.

据此分析可知：若 $(n+1)p$ 为整数，则

$$P(X=0)<P(X=1)<\cdots<P(X=(n+1)p-1)=P(X=(n+1)p)>P(X=(n+1)p+1)>\cdots>P(X=n),$$

所以当 $X=(n+1)p-1$ 或 $X=(n+1)p$ 时，对应概率最大；若 $(n+1)p$ 不为整数，记 $(n+1)p$ 的整数部分为 $[(n+1)p]$，则易知

$$P(X=0)<P(X=1)<\cdots<P(X=[(n+1)p])>P(X=[(n+1)p]+1)>\cdots>P(X=n),$$

所以当 $X=[(n+1)p]$ 时，对应概率最大.

综上，二项分布中概率最大值理论：设随机变量 $X\sim B(n,p)$，若 $(n+1)p$ 为整数，则当 $X=(n+1)p-1$ 或 $X=(n+1)p$ 时，对应概率最大；若 $(n+1)p$ 不为整数，则当 $X=[(n+1)p]$ 时，对应概率最大.

2　概率最大值理论应用举例

1）简单应用

例 1　某人在 11 次射击中击中目标的次数为 X，若 $X\sim B(11,0.8)$，且 $P(X=k)$ 最大，则 $k=$（　　）.

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

解析　**方法 1**　因为 $X\sim B(11,0.8)$，且 $P(X=k)$ 最大，所以

$$\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\\P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\end{cases}$$

即 $\begin{cases}\mathrm{C}_{11}^k 0.8^k 0.2^{11-k}\geqslant \mathrm{C}_{11}^{k+1} 0.8^{k+1}0.2^{10-k},\\\mathrm{C}_{11}^k 0.8^k 0.2^{11-k}\geqslant \mathrm{C}_{11}^{k-1} 0.8^{k-1}0.2^{12-k},\end{cases}$

解得 $8.6\leqslant k\leqslant 9.6$.

又因为 $k\in\{0,1,2,\cdots,11\}$，所以 $k=9$，故选 C.

方法 2　因为 $(n+1)p=12\times0.8=9.6$ 不是整数，所以根据二项分布中概率最大值理论可知：当 $X=[9.6]=9$ 时，对应概率最大.从而 $k=9$，故选 C.

点评　本题已知 X 服从二项分布，所以相对简单一些，其中方法 1 是按解答题进行求解的，显然比较麻烦，计算量较大，且容易出错；而方法 2 直接利用概率最大值理论求解，彰显了“秒杀”的解题效果.

例 2　某人投篮命中的概率为 0.3，投篮 15 次，最有可能命中________次.

解析　**方法 1**　设某人投篮命中次数为 X，则易知 $X\sim B(15,0.3)$，设最有可能命中 k 次，则有

$$\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\\P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\end{cases}$$

即 $\begin{cases}\mathrm{C}_{15}^k 0.3^k 0.7^{15-k}\geqslant \mathrm{C}_{15}^{k+1} 0.3^{k+1}0.7^{14-k},\\\mathrm{C}_{15}^k 0.3^k 0.7^{15-k}\geqslant \mathrm{C}_{15}^{k-1} 0.3^{k-1}0.7^{16-k},\end{cases}$

解得 $3.8 \leqslant k \leqslant 4.8$.

又因为 $k \in \{0,1,2,\cdots,15\}$,所以 $k=4$,故最有可能命中4次.

方法2 因为 $(n+1)p=16 \times 0.3=4.8$ 不是整数,所以根据二项分布中概率最大值理论可知:当 $X=[4.8]=4$ 时,对应概率最大,故最有可能命中4次.

点评 本题需要根据题意,先明确具体的分布是什么,再利用方法1、方法2加以灵活求解.显然,作为填空题,应该优先使用方法2求解,即利用概率最大值理论求解比较快捷.

2)综合应用

例3 已知随机变量 $X \sim B(6,0.8)$,若 $P(X=k)$ 最大,则 $D(kX+1)=$________.

解析 **方法1** 因为 $X \sim B(6,0.8)$,且 $P(X=k)$ 最大,所以

$$\begin{cases} P(X=k) \geqslant P(X=k+1), \\ P(X=k) \geqslant P(X=k-1), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \mathrm{C}_6^k\, 0.8^k 0.2^{6-k} \geqslant \mathrm{C}_6^{k+1}\, 0.8^{k+1} 0.2^{5-k}, \\ \mathrm{C}_6^k\, 0.8^k 0.2^{6-k} \geqslant \mathrm{C}_6^{k-1}\, 0.8^{k-1} 0.2^{7-k}, \end{cases}$$

解得 $4.6 \leqslant k \leqslant 5.6$.

又因为 $k \in \{0,1,2,\cdots,6\}$,所以 $k=5$.于是

$$D(kX+1)=k^2 D(X)=5^2 \times 6 \times 0.8 \times 0.2=24.$$

方法2 因为 $(n+1)p=7 \times 0.8=5.6$ 不是整数,所以根据二项分布中概率最大值理论可知:当 $X=[5.6]=5$ 时,对应概率最大.从而依据题意可得 $k=5$.于是

$$D(kX+1)=k^2 D(X)=5^2 \times 6 \times 0.8 \times 0.2=24.$$

点评 本题需要先求得 k 的值,再灵活利用结论"若 $X \sim B(n,p)$,则 $E(X)=np$,$D(X)=np(1-p)$"和"$E(aX+b)=aE(X)+b$,$D(aX+b)=a^2 D(X)$"即可获解.

例4 (多选题)已知随机变量 $\xi \sim B(2n,p)$,$n \in \mathbf{N}^*$,$n \geqslant 2$,$0<p<1$,记 $f(t)=P(\xi=t)$,其中 $t \in \mathbf{N}$,$t \leqslant 2n$,则( ).

A. $\sum\limits_{t=0}^{2n} f(t)=1$

B. $\sum\limits_{t=0}^{2n} t f(t)=2np$

C. $\sum\limits_{t=0}^{n} f(2t)<\dfrac{1}{2}<\sum\limits_{t=1}^{n} f(2t-1)$

D. 若 $np=6$,则 $f(t) \leqslant f(12)$

解析 对于A,因为 $\sum\limits_{t=0}^{2n} f(t)=\sum\limits_{t=0}^{2n} P(\xi=t)=1$,所以A正确;对于B,因为 $\sum\limits_{t=0}^{2n} t f(t)=E(\xi)=2np$,所以B正确;对于C,当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时,$\sum\limits_{t=0}^{n} f(2t)=\sum\limits_{t=1}^{n} f(2t-1)=\dfrac{1}{2}$,所以C错误;对于D,若 $np=6$,则 $(2n+1) \cdot p=12+p$,又因为 $0<p<1$,所以 $(2n+1)p$ 不是整数,所以根据二项分布中概率最大值理论可知:当 $\xi=[(2n+1)p]=12$ 时,对应概率最大,即 $f(12)$ 最大,从而 $f(t) \leqslant f(12)$ 成立,所以D正确.

综上,选ABD.

点评 本题设计较好,属于多选题,符合新高考试题类型,同时也充分体现了二项分布求和、不等式的综合运用,显然能较好地考查学生的解题能力.

例5 有同学重复投掷一枚质地均匀的骰子并实时记录点数1出现的次数,当投掷到第35次时,记录到此时点数1出现5次.若继续再进行65次投掷试验,则当投掷到第100次时,点数1一共出现的次数为________的概率最大.

解析 继续再进行65次投掷实验,设出现点数为1的次数为 X,则易知 $X \sim B\left(65,\dfrac{1}{6}\right)$.

因为 $(n+1)p=66 \times \dfrac{1}{6}=11$ 是整数,所以根据二项分布中概率最大值理论可知:当 $X=11$ 或 $X=10$ 时,对应概率最大.于是,可知后面65次中出现11次或10次时,点数1出现的概率最大.再加上前面35次中点数1出现的5次,即得所求结论为:当投掷到第100次时,点数1一共出现的次数为16或15的概率最大.

点评 本题设计新颖,关注数学的实际应用,考查学生分析、解决问题的能力.解题的关键是审清题意,再明确二项分布,灵活运用概率最大值理论简捷求解.

综上,关注二项分布中概率最大值理论的推导过程,有利于强化学生的数学运算能力以及逻辑推理能力;关注二项分布中概率最大值理论的解题应用,有助于学生简捷求解有关问题.故曰,学无止境,且学且悟且应用.

(完)